TMV166/186 Linjär algebra M och TD, vt 2013
Vecko–PM läsvecka 2

Kapitel 2.1-2.5 Matrisalgebra

I kapitel 1 studerade vi först linjära ekvationssystem och införde då två matriser. Dels systemets koefficientmatris, dels den utvidgade matrisen, systemets totalmatris, där också högerleden inkluderas. Koefficientmatrisen kan också uppfattas som matrisen till en linjär avbildning. Det är detta synsätt som ligger till grund för behovet av andra räkneooperationer än multiplikationen $A\mathbf{x}$. Matrisaddition, $A+B$, motsvarar då addition av linjära avbildningar $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Multiplikation av en matris med en skalär, cA, motsvarar avbildningen $cT:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Matrismultiplikation AB motsvarar sammansättning av avbildningar. Matrisinvers motsvarar inversen till avbildningen.

I **2.1** definieras operationerna, räknelagar formuleras och härleds. Du skall behärska både definitionen av matrismultiplikation och rad-kolonn regeln för beräkning av produkten. Matristransponering kan inte motiveras enkelt med en operation på en avbildning men är av vikt trots det. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ är $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ skalärprodukten av vektorerna. Den transponerade matrisen används bl.a. i minstakvadrat-metoden.
”Smygvägen” införs diverse praktiska beteckningar: $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ betyder att $\mathbf{a}_1$ är den vektor man får av första kolonnen i A, $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ innebär att elementen i A betecknas a_{ij}. Märk att man använder dubbelindex, i är radindex, j är kolonnindex. Elementet a_{11}, läs a-ett-ett inte a-elva, står i rad 1 och kolonn 1, $a_{13\ 17}$, a-tretton-sjutton, står i rad 13 kolonn 17.

För att ”plocka ut” element ur en matris kan man skriva $(A)_{ij}$, eller $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{ij}$. $(A)_{25}$ är alltså elementet på rad 2, kolonn 5 i matrisen A. Hela kolonner eller rader kan man beteckna $\mathrm{col}_j(A)$ respektive $\mathrm{row}_i(A)$.

I kapitel 3 införs beteckningen A_{ij} för den matris man får då man *stryker* rad i och kolonn j i matrisen A.

I **2.2** definieras begreppet *inverterbar* matris. Ett användbart begrepp, men tänk på att det kräver mer kalkyler att lösa ett ekvationssystem med matrisinvers än genom eliminering.

Sats 8 i avsnitt **2.3** är mycket viktig då den kopplar samman begreppet inverterbar matris med de olika sätten att tänka om ekvationssystem, vektorekvationer och matrisekvationer, som studerades i kapitel 1. Gå igenom satsens bevis ordentligt, det ger en bra repetition av mycket av det du lärt hittills.

I **2.4** undersöks hur matrisoperationerna fungerar om matriserna är uppbyggda av mindre delmatriser, block. Detta är relativt vanligt i tillämpningar och kan enkelt hanteras i t.ex. Matlab. Viktigt är att om två matriser har blockindelning som gör operationerna möjlig så kan addition och multiplikation beräknas *som om blocken vore skalärer*. Blocken adderas eller multipliceras sedan som fristående matriser.

LU-faktoriseringen i avsnitt **2.5** handlar om att lagra operationerna som leder till trappstegsformen av ett ekvationssystems koefficientmatris. Matrisen L innehåller operationerna, U är trappstegsformen.Exempel 2 illustrerar utmärkt hur det går till att skapa L i ett enkelt fall. Det är en god idé att gå tillbaka till avsnitt 2.2 och läsa det mer detaljerade avsnittet om elementära matriser.

Lärmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
2.1	addera matriser
2.1	multiplicera matriser dels genom användning av definitionen, dels med *rad* $\bullet$ *kolonn*-metoden.
2.1	utnyttja räknereglerna i sats 2.1.2 vid beräkningar
2.1	ge exempel som visar att (a) matrismultiplikationen inte är kommutativ. (b) annulleringslagen *inte* gäller , man kan alltså inte "förkorta": $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. (c) en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
2.1	transponera matriser
2.1	utnyttja räknereglerna i sats 2.1.3 vid beräkningar
2.2	beräkna matrisinvers med hjälp av sats 2.2.4 och metoden i exempel 2.2.7
2.2	tillämpa sats 2.2.5 och 2.2.6 i problemlösning
2.3	tillämpa sats 2.3.8 i problemlösning
2.5	bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
2.1	bevisa att $A(BC) = (AB)C$.
2.2	definiera begreppet inverterbar matris
2.2	förklara varför metoden i exempel 2.2.7 ger det önskade resultatet.
2.3	bevisa sats 2.3.8.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt, lösningar finns i slutet av avsnittet. Det finns vissa små skillnader i uppgifter till tredje och fjärde upplagan, i allmänhet betydelselösa. Skrivsättet 15(17) innebär att uppgift 15 i fjärde upplagan ska ersättas av uppgift 17 i tredje uppdaterade upplagan.)

Avsnitt	Godkändnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
2.1	PP, 1, 3, 5, 7	9, 15, 16	21, 22, 23, 26(24)
2.2	PP, 1, 5	7, 9, 10, 31, 32	15(12), 13, 18(17), 21, 23, 33, 35
2.3	PP, 1, 3	11, 12, 13	16(17), 17(15), 21, 24(23)
2.4	PP, 1, 5	25	
2.5	PP, 1, 7, 9	15	