MATEMATIK | **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2006-03-11 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Micke Persson tel. 0762-721860
David Rydh tel. 0762-721861

Linjär Algebra M1/TD1 (tmv165/185)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Rättningsprotokoll anslås på MV ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange värdet av $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Ange en trappmatris som är radekvivalent med totalmatrisen för ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

(c) Ange den symmetriska koefficientmatrisen till den kvadratiska formen (1p)
$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

(d) Ange egenvärden och motsvarande egenvektorer till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. (3p)

(e) Ange bas för nollrum till $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(f) Låt P vara en ortogonal matris. (3p)

Ange $P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ då $P\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ (två möjligheter).

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm LU-faktoriseringen av A. (3p)

(b) Bestäm inversen till A. (3p)

3. Låt (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

(a) Bestäm en bas för Col(A).

(b) Bestäm en ON-bas för Col(A).

Var god vänd!

4. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en andragradskurva $y = a{+}b{\cdot}t{+}c{\cdot}t^2$ (6p)
till följande data

t	-2	-1	0	1	2
y	5	0	0	-2	1

Rita en beskrivande figur.

Beräkna också medelfelet.
OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata (mätpunkter), så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av att $T(\mathbf{x})$ är speglingen av $\mathbf{x}$ i planet $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. (6p)

(a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$ i vilken matrisen för T är en diagonalmatris. Ange denna diagonalmatris D och bestäm $[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B}$ då $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = [1, 2, 3]^T$.

(b) Ange basbytesmatrisen P för koordinatbyte mellan standardbas och basen $\mathcal{B}$. Bestäm $\mathbf{x}$ och $T(\mathbf{x})$ då $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = [1, 2, 3]^T$.

(c) Vilket samband råder mellan standardmatrisen M för T och matriserna P och D ovan.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) För alla kvadratiska matriser A, B och C, gäller att
om $A \neq 0$ och $AB = AC$ så är $B = C$.

(b) För alla kvadratiska matriser A, B och C, gäller att
om $\det(A) \neq 0$ och $AB = AC$ så är $B = C$.

(c) Om $\text{Rank}[A|\mathbf{b}] = \text{Rank}(A)$ så har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.

(d) Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har en dubbelrot 4, så måste egenrummet, som hör till egenvärdet 4, vara tvådimensionellt.

(e) Om A är en symmetrisk matris och $\det(A - \lambda I) = 0$ har en dubbelrot 4, så måste egenrummet, som hör till egenvärdet 4, vara tvådimensionellt.

(f) Det finns en 6×3-matris, A, sådan att $(\text{Col } A)^\perp$ har dimension 2.

7. Antag att $\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \cdots, \ \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd av nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$. (6p)

Bevisa att $\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \cdots, \ \mathbf{v}_p\}$ är linjärt oberoende.

Lycka till!
C-H F