MATEMATIK **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2006-08-26 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt:Milena Anguelova tel. 0762-721860

Jan-Erik Andersson tel. 0762-721861

Linjär Algebra M1/TD1 (tmv165/185)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

Rättningsprotokoll anslås på MV ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Bestäm en ortogonal bas för Span$\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ då (2p)

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(c) Ange avbildningsmatrisen (i standardbas) för den linjära avbildning (3p)

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) Ange en bas för Nul(A) då $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Ange en bas för Col(A) då $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. (2p)

(f) Bestäm LU-faktoriseringen av $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. (3p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen $AX + B = BX + E$, där (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Lös följande ekvationssystem approximativt med minstakvadratmetoden. (6p)

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ x & & & = & 2 \\ & & y & = & 1 \\ & & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 1 \end{cases}$$

Beräkna också medelfelet.

Obs: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet ekvationer, så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

Var god vänd!

4. Låt följande vektorer i $\mathbb{R}^4$ vara givna:

$$\mathbf{v}_1 = [1, 2, 3, 4],\ \mathbf{v}_2 = [1, 1, 0, 1],\ \mathbf{v}_3 = [4, 3, 2, 1],\ \text{och}\ \mathbf{v}_4 = [1, 0, 2, \lambda].$$

(a) För $\lambda = 1$ utgör vektorerna en bas (det behöver du inte visa). Bestäm koordinaterna för $\mathbf{b} = [4, 5, 3, 1]$ i den basen. (3p)

(b) För vilket eller vilka värden på λ utgör vektorerna $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4\}$ *inte* en bas? (3p)

5. Ange vilken typ av kurva följande ekvation beskriver: (6p)

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5.$$

Skissa också kurvan i grova drag (markera särskilt kurvans symmetriaxlar).

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Antag att A är en $n \times m$-matris och att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är olika vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då är det fullt möjligt att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ har oändligt många lösningar och $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ har entydig lösning.

(b) Antag att A är en $n \times n$-matris och att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är olika vektorer i $\mathbb{R}^n$. Om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ har entydig lösning så måste $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ också ha entydig lösning.

(c) Om A och B är inverterbara $n \times n$-matriser så är $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(d) Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots\ \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \ldots\ \mathbf{c}_n\}$ är två baser för ett vektorrum. Låt $P = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ vara koordinatbytesmatrisen för byte från $\mathcal{C}$-koordinater till $\mathcal{B}$-koordinater, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Då är den i-te kolonnen i P koordinatvektorn $[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{B}}$.

(e) Om A är inverterbar så är $\mathrm{Rank}(AB) = \mathrm{Rank}(B)$

(f) Antag att $\{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots\ \mathbf{b}_n\}$ är bas för ett vektorrum V och att $F:\ V \to V$ är en injektiv linjär avbildning. Då är $\{F(\mathbf{b}_1),\ F(\mathbf{b}_2),\ \ldots\ F(\mathbf{b}_n)\}$ en bas för V.

7. (a) Visa med definitionens hjälp att $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor som hör till egenvärdet 4 för matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(b) Bevisa att λ är ett egenvärde till matrisen A om och endast om λ är en lösning till matrisens karakteristiska ekvation (sekularekvationen). (4p)

Lycka till!
C-H F