MATEMATIK	**Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola	Datum: 2007-03-17 kl. 08.30–12.30
Tentamen	Telefonvakter:Elin Götmark, Jonatan Vasilis
	tel. 0762-721860/0762-721861

Linjär Algebra M1/TD1 (tmv165/185)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 06/07 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (06/07) webbsida 19/3. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & a+1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & a+1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) U är det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. (3p)

Avgör för vilket eller vilka värden på den reella konstanten a vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & a-4 & 5-a & 2 \end{bmatrix}^T$ tillhör underrummet U.

(c) Ange dessutom en bas för underrummet U ovan. (2p)

(d) Ange avbildningsmatrisen (i standardbas) för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Ange minstakvadratlösningen till ekvationsystemet (3p)

$$\begin{cases} x & & = 0 \\ & y & = 1 \\ x & + \; y & = 10. \end{cases}$$

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm en matris P som diagonaliserar matrisen $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (6p)

Ange också diagonalmatrisen D som uppfyller $P^{-1}MP = D$.

(b) Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definieras enligt (2p)

$$T(p(t)) = p''(t) + (t+1)p'(t) + 2p(t)$$

Visa att M är avbildningsmatrisen till T i standardbasen $\{1, t, t^2\}$. Bestäm en bas för $\mathbb{P}_2$ av egenvektorer till T.

Var god vänd!

3. Låt U vara ett underrum i $\mathbb{R}^4$ som definieras genom

$$U = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \}$$

(a) Ange en matris A så att $U = \operatorname{Nul} A$. Bestäm en bas för U. (2p)

(b) Bestäm en ON-bas för U. (2p)

(c) Skriv vektorn $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ med $\mathbf{w}_1 \in U$ och $\mathbf{w}_2 \in U^\perp$. Bestäm sedan avståndet från $\mathbf{w}$ till U. (2p)

4. Lös följande system av differentialekvationer (6p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

5. Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ och basen $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (4p)

Bestäm basbytesmatrisen (koordinatbytesmatrisen) $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Spegling i linjen $y = x + 1$ är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

(b) Om A är en symmetrisk matris så är A diagonaliserbar.

(c) Om A är en diagonaliserbar matris så är A symmetrisk.

(d) $U = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2 \}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^2$.

(e) Om tre vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är de linjärt oberoende.

(f) Om A är en $n \times n$ matris och $(\operatorname{Col} A)^\perp = \{\mathbf{0}\}$ så är $\det A \neq 0$.

7. Låt A vara en $n \times n$ matris.

(a) Definiera begreppet: *A är en inverterbar matris.* (1p)

(b) Bevisa enbart med stöd av definitionen ovan: om $A^2 + A = I_n$ så är A inverterbar. (2p)

(c) Bevisa: om A är inverterbar så är inte noll ett egenvärde till A. (1p)

(d) Bevisa: om A har ortogonala kolonner och ingen kolonn är nollvektorn så är A inverterbar. (2p)

Lycka till!
C-H F