MATEMATIK | **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2009-01-15 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Aron Lagerberg
tel. 0762-721860

Linjär Algebra M (tmv165/166)
Linjär Algebra Td (tmv185/186)

Skriv tentamenskod tydligt på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget och placeringslistan noggrannt och tydligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 07/08 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (07/08) webbsida senast 17/1. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) **ett blad**.

(a) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(b) Ange en egenvektor som hör till egenvärdet 1 till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. (2p)

(c) Ange ett tal h sådant att vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & h \end{bmatrix}^T$ är en linjärkombination av vektorererna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ där (3p)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(d) En linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har en egenvektor $\mathbf{e}_1$ med egenvärde 2 och avbildar vektorn $\mathbf{e}_2$ på $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för A i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ och bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. (2p)

(e) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ och $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ är radekvivalenta. Ange rangen för A samt en bas för kolonnrummet för A. (2p)

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen (7p)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Finns det en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till denna matris? Bestäm i så fall en sådan.

Var god vänd!

3. Låt M vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som ges av (6p)

$$M = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

(a) Bestäm en bas i M.

(b) Bestäm en ON-bas i M.

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ på M.

4. (a) Antag att A är en 2×2-matris som har egenvektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ med egenvärdena 1 respektive -1. (2p)
Bestäm A^n för $n = 1, 2, \ldots$

(b) Med samma A som i (a) betraktar vi systemet av differentialekvationer (4p)
$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
Bestäm $\mathbf{x}(t)$.
För full poäng skall du motivera din lösningsmetod väl.

5. Ange en ekvation för den linje som är bäst anpassad, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna (4p)

$$(1, 5), \quad (2, 6), \quad (3, 10), \quad (4, 12), \quad (5, 17).$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A och B är två kvadratiska matriser av samma typ och B är inverterbar så gäller att $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

(b) Om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ spänner upp $\mathbb{R}^5$ så är de linjärt oberoende.

(c) Om A och B är 3×3-matriser och $AB = 0$ så gäller antingen $A = 0$ eller $B = 0$.

(d) Om A är en (5×5)-matris sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösningar för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ så är matrisen A inverterbar.

(e) Om (5×5)-matrisen A har egenvärdena 1,2 och 3, och inga fler, så måste A vara inverterbar.

(f) Varje kvadratisk matris är diagonaliserbar.

7. (a) Definiera begreppet linjärt oberoende vektorer. (2p)

(b) Bevisa att om $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ är linjärt oberoende och $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}, \mathbf{b}\}$ är linjärt beroende så måste $\mathbf{b}$ vara en linjär kombination av $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$. (2p)

(c) Låt $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ vara parvis ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$, dvs $\mathbf{v_i} \cdot \mathbf{v_j} = 0$ då $i \neq j$. Bevisa att $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ är en bas i $\mathbb{R}^n$. (4p)

Lycka till!
Carl-Henrik