

RÖ1. LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Linjärt ekvationssystem

linjärt
Ett antal ekvationer som alla beror på ett antal variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$,
dvs varje ekvation är på formen

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = b,$$

t.ex $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$, $\textcircled{2} \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases}$, $\textcircled{3} \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

Lösningsmetod

koefficienter framför x_1 och x_2 :

$\textcircled{1} \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{-1}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot \frac{-1}{2}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{-1}}$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Exakt en lösning!

vi tar -1 gånger första ekvationen och lägger till andra. Det kan vi göra eftersom vi lägger till lika mycket på varje sida.

vi multiplicerar ekvation två med $-\frac{1}{2}$, ok eftersom vi gör samma på båda sidor

$\textcircled{2} \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 3 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases}$

x_2 fri $\Rightarrow$ oändligt många lösningar! Vi ser att ekvationerna är multiplar av varandra, därför har vi egentligen färre ekv. än obekanta.

$\textcircled{3} \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{array} \right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 3 \\ 0 = 10 \end{cases} \text{ Omöjligt, ingen lösning! }$$

Byt plats på ekvationerna!

sammanfattningsvis kan tre saker hända med ett linjärt ekvationssystem

1. Exakt en lösning
2. Oändligt många lösn.
3. Ingen lösning

1.1.1. Lös

$$\begin{aligned}x_2 + 5x_3 &= -4 \\x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -2 \\2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -2\end{aligned}$$

På matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

Tredje ekvationen säger $0 = -2 \Rightarrow$ systemet saknar lösning, fall 3.

1.3.12. Är b en linjärkombination av a_1, a_2, a_3 , då $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$$a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad ?$$

En linjärkombination av ett antal vektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$ är en vektor
 $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$, där $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstanter

kan vi skriva

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = b \Leftrightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

för några c_1, c_2, c_3 ?

Notera att

$$\underset{a_1}{c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} + \underset{a_2}{c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}} + \underset{a_3}{c_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

vi vill lösa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{①}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{array} \right]$$

Eftersom vi har fått en matris på trappstegsform och vi ser att $c_3 \neq 0$ vet vi att systemet har en lösning $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och att

b är en linjärkombination av a_1, a_2, a_3 .

Vill vi hitta lösningen får vi fortsätta radreducera (men det behövs inte för svaret till denna uppgiften)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{①}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 11 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{②}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{121-12}{11} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{55+14}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③}} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{109}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{33} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{②}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{327-82}{33} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{33} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{aligned} c_1 &= \frac{245}{33} \\ c_2 &= -\frac{41}{33} \\ c_3 &= -\frac{2}{11} \end{aligned}$$