

RÖ 2. MATRISSEKVATIONER, LINJÄRT BEROENDE

1.4.15. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Visa att $Ax = b$ inte har en lösning för alla

b och beskriv de b för vilka $Ax = b$ har en lösning.

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b.$$

vi löser genom den utvidgade matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ -9 & 3 & b_2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{array} \right]$$

vi måste se till att rad 2 blir en nollrad, dvs $b_2 + 3b_1 = 0$ är de b som systemet har en lösning för. För alla andra b saknar systemet lösning, så det har inte en lösning för alla b .

1.5.11 skriv alla lösningar till $Ax = 0$ på parameterform, då A är rad-ekvivalent med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vilken storlek har A ? samma som J , 4×6 .

$$[a_1, a_2, \dots, a_6 | 0] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{②}} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③}} \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} \text{pivot } x_1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \text{pivot } x_3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{pivot } x_5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi har pivotkolonnerna 1, 3, 5 vilket betyder att x_1, x_3, x_5 är basvariabler och x_2, x_4, x_6 är fria.

Ekvationssystemet säger att

$$x_1 = 4x_2 - 5x_6$$

x_2 fri

$$x_3 = x_6$$

x_4 fri

$$x_5 = 4x_6$$

x_6 fri

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\quad \quad \quad w_1 \quad \quad \quad w_2 \quad \quad \quad w_3$

eller $x = s w_1 + t w_2 + u w_3$

Parameterform

Lösningen till ett ekvationssystem uttrycks enbart i de fria variablerna, vilka är parametrar eftersom de kan sättas till vilket värde som helst.

Frågor innan

1. Hur stor är x ?
2. Hur många fria variabler kan vi som minst ha (då vi vet storleken på A)?
3. Vad säger nollraden om antalet fria variabler?
4. Vilka är de fria variablerna och vilka är basvariabler? (kan ses utan att räkna något)

Svar

1. 6×1

2. 6 obekanta och 4 ekvationer $\Rightarrow$ minst 2 fria variabler

3. Vi får en till fri variabel eftersom en ekvation försvinner $\Rightarrow$ fri variabel 2

$\Rightarrow$ 3 fria variabler $\Rightarrow$ vi kommer kunna skriva $x = s w_1 + t w_2 + u w_3$

$\uparrow$ fri variabel 1 $\uparrow$ fri variabel 2 $\uparrow$ fri variabel 3

4. Pivotkolonner 1, 3, 5 $\Rightarrow x_1, x_3, x_5$ basvariabler

och x_2, x_4, x_6 fria variabler, dvs $s = x_2, t = x_4, u = x_6$

ex. på lösning på parameterform

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{②} - 2 \cdot \text{①}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ fri} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs x_1 basvariabel och x_2 fri variabel $\Rightarrow$ vi kan uttrycka x_1 mha. x_2 .

1.7.9. Låt $W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$, $W_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$

- a) för vilka h är W_3 i $\text{span}\{W_1, W_2\}$
 b) för vilka h är $\{W_1, W_2, W_3\}$ linjärt beroende?

spannet av W_1 och W_2 , $\text{span}\{W_1, W_2\} = \{x: x = c_1 W_1 + c_2 W_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$,
 dvs alla vektorer vi kan få som linjärkombinationer av W_1 och W_2 .

$\{W_1, W_2, W_3\}$ är linjärt beroende om det finns en lösning $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ till

$$c_1 W_1 + c_2 W_2 + c_3 W_3 = 0 \quad (1)$$

$\{W_1, W_2, W_3\}$ är linjärt oberoende om den enda lösningen till

$$c_1 W_1 + c_2 W_2 + c_3 W_3 = 0$$

är $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Vi vill lösa

$$c_1 W_1 + c_2 W_2 = W_3 \Leftrightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & h \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③} - 2 \cdot \text{①}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & h-10 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow$ inga värden på h
 eftersom vi har en
 ekvation som säger $0=8$,
 vilket inte gäller för något h .

b) Vi ser att $W_2 = -3W_1$, dvs $3W_1 + W_2 + 0 \cdot W_3 = 0$,

dvs det finns en nollskild lösning $(c_1, c_2, c_3) = (3, 1, 0)$ till (1) som

gäller oberoende av $h \Rightarrow$ linjärt beroende för alla h

om vi inte sagt detta skulle vi fått lösa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ -3 & 9 & -7 & 0 \\ 2 & -6 & h & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{③ \sim ② \\ \sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & h-10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{③ \sim ② \\ \sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h-10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{③ \sim ③ - (10-h) \cdot ② \\ \sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow$ oändligt många lösningar

$$\begin{cases} c_1 = 3c_2 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{linjärt beroende}$$

Linjära transformationer

En linjär transformation $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär funktion, dvs för $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \quad \alpha, \beta \text{ scalars.}$$

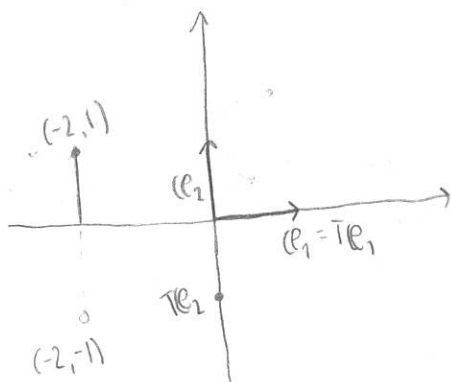
T kan uttryckas med en matrismultiplikation

$$T(x) = Ax,$$

för en unik matris A , där $A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$

Exempel:

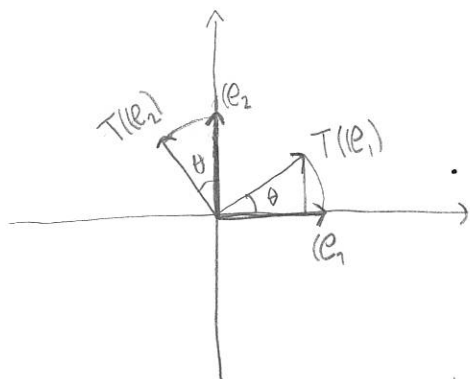
spegling i x-axeln



$$A = [T(e_1) \ T(e_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

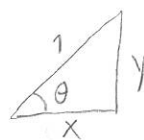
Rotation med vinkeln θ runt origo moturs



$$T(e_1) = (1 \cdot \cos \theta, 1 \cdot \sin \theta)$$

$$T(e_2) = (-1 \cdot \sin \theta, 1 \cdot \cos \theta)$$

$$A = [T(e_1) \ T(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

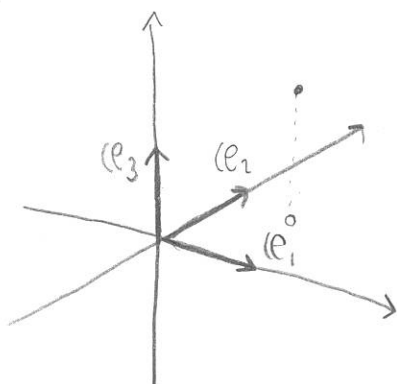


$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

vill vi rotera en punkt x med vinkeln θ runt origo
beräknar vi Ax .

projektion på xy-planet



$$T(e_1) = e_1$$

$$T(e_2) = e_2$$

$$T(e_3) = 0$$

eftersom de redan är i planet

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dvs vi tar bara bort z-koordinaten!