

RÖ 3. MATRISOPERATIONER OCH INVERSA MATRISER

1.10. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifiera att $AB = AC$, men $B \neq C$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-18 & 3-24 \\ 1+6 & -1+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9-12 & -15-6 \\ 3+4 & 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = AB$$

men B och C är olika.

Vi kan dra slutsatsen att $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

2.2.8. Antag att P är inverterbar och att $A = PBP^{-1}$.

Lös ut B i termer av A .

Vi vet att $PP^{-1} = I$ och $P^{-1}P = I$ eftersom P är inverterbar.

Vi vet också att $IB = B$.

Hur får vi bort P och P^{-1} runt B ? Vi vill ha $B = \dots$

$$A = PBP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}A = \underbrace{P^{-1}P}_{I}BP^{-1} = BP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = \underbrace{BP^{-1}P}_{I} = B$$

$\text{så } B = P^{-1}AP$

2.2.21. Förklara varför kolonnerna i en $n \times n$ -matris A måste vara linjärt oberoende då A är inverterbar.

Vad vet vi: Det finns en matris A^{-1} sådan att $A^{-1}A = I$ och $AA^{-1} = I$.

Vad vill vi visa: Låt $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, så att $a_1, \dots, a_n$ är kolonnerna i A . Vi ska visa att de är linjärt oberoende, dvs den enda lösningen till

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = (0)$$

$$\text{är } c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

$$\text{vi ska alltså lösa } c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = \underbrace{[a_1 \dots a_n]}_A \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}}$$

$$= A\mathbb{C} = (0)$$

Eftersom A är inverterbar gäller att

$$\underbrace{A^{-1}A}_I \mathbb{C} = \underbrace{A^{-1}(0)}_{(0)}$$

(vi "multiplicerar" med A^{-1} på båda sidor)

$$\Leftrightarrow \mathbb{C} = (0) \quad \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0,$$

dvs kolonnerna i A är linjärt oberoende!

32. Beräkna inversen till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ om den existerar.

Vi ser om vi kan radreducera $[A | I]$ till $[I | A^{-1}]$. I sådana fall finns en invers, annars saknas invers.

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{④②}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{②}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 & 1 \end{array} \right] \leftarrow \text{här fick vi en nollrad och inte } [0 \ 0 \ 1], \text{ därför saknas invers!}$$

Därför är kolonnerna i A linjärt beroende.

Varför fungerar denna metod?

vi försöker lösa $A \cdot C = I$ för att hitta C , dvs om C existerar, uppfyller den det vi vill, nämligen att $AC = I$. Vi låter då $C = A^{-1}$ och får $AA^{-1} = I$, som en invers ska uppfylla.