RÖ5. DETERMINANTER

3.1.3. Beräkna $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ genom en kofaktorutveckling längs

① första raden och ② sedan längs andra kolumnen.

Inför hjälpmatrisen $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ (varannan rad ska börja med + och varannan med − oberoende av matrisens storlek)

①: $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2(1\cdot(-1) - 2\cdot 4) + 4(3(-1) - 2\cdot 1) + 3\cdot(3\cdot 4 - 1\cdot 1)$

$= -18 - 20 + 33 = -5$

②: $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4(-3-2) + (-2-3) - 4(4-9) = -20 - 5 + 20 = -5$

3.2.5. Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$ genom att radreducera matrisen till trappstegsform.

<u>Räkneregler för determinanten av en $n\times n$-matris A.</u>

1. Determ. ändras inte om en multipel av en rad i A läggs till en annan.
2. Om två rader byter plats i A byter determ. tecken.
3. Om en rad i A multipliceras med k blir determ. $k\cdot \det(A)$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \; 2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Determinanten av en matris på trappstegsform är produkten av diagonalelementen!

3.2.25. Använd determinant för att bestämma om $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ är linjärt beroende.

Om A är en $n \times n$-matris och $\det(A) = 0$ är kolumnerna i A linjärt beroende, annars är de linjärt oberoende.

Låt $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & 0 \\ -6 & 7 & -5 \end{bmatrix}$, då är $\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & 0 \\ -6 & 7 & -5 \end{vmatrix}$

obs! Funkar bara på 3×3-determinanter

$$= 7 \cdot 5 \cdot (-5) + (-8) \cdot 0 \cdot (-6) + 7 \cdot (-4) \cdot 7 - 7 \cdot 5 \cdot (-6) - (-8) \cdot (-4) \cdot (-5)$$

$$- 7 \cdot 0 \cdot 7 = \underbrace{-175 + 0 - 196}_{-371} + \underbrace{210 + 160}_{370} - 0 = -1$$

så $\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ kolonnerna i A är linjärt oberoende

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende.

3.2.29. Beräkna $\det(B^5)$ då $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{Vi noterar att } \det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2 \text{ om } A_1, A_2 \text{ är } n \times n\text{-matriser}}$

$$\det(B^5) = \det(B^2 \cdot B^3) = \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(B^2 \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B)$$
$$\cdot \det(B) \cdot \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^5$$

så $\boxed{\det(A^k) = (\det(A))^k, \quad k \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \det(B^5) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}^5 = \{\text{kofaktorutv. längs rad } 1\}$$

$$= \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)^5 = \left[(1-4) + (2-1)\right]^5 = (-2)^5 = \underline{\underline{-32}}$$