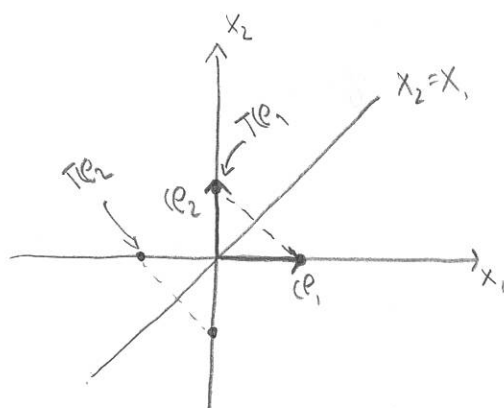


RÖ 6. KRYSSUPPGIFTER

1.9.10. Antag att T är en linjär transformation. Hitta standardmatrisen för $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som först reflekterar punkter i x_1 -axeln och sedan i linjen $x_2 = x_1$.

Standardmatrisen A för $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uppfyller att $T(x) = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, där $A = [Te_1, \dots, Te_n]$.

Vi har $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, så vi måste beräkna Te_1 och Te_2 .



Vi får $Te_1 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Te_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (se figur)

Därmed är $A = [Te_1, Te_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.1.9. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$. För vilka k gäller att

$$AB = BA?$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 18+3k \\ -4 & -9+k \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -6-k & -9+k \end{bmatrix}$$

Vi måste ha $\begin{cases} 18+3k = 12 \\ -6-k = -4 \end{cases} \Rightarrow k = -2 \Rightarrow AB = BA$ om $k = -2$.

2.2.31. Beräkna inversen till $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ om den existerar.

Inversen fås genom att radreducera $[A \mid I]$ till $[I \mid A^{-1}]$.
om inte det går saknas invers.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③} - 2 \cdot \text{①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③} + 3 \cdot \text{②}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{①} + 2 \cdot \text{③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2.5.5. Lös $Ax = b$ med hjälp av LU-faktoriseringen av A , då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

och $b = [1 \ 6 \ 0 \ 3]^T$.

vi noterar att $Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{LU}_A x = b$ och inför $\begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$

Först löser vi $Ly = b$ för y :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{③} + \text{①}, \text{④} - 3 \cdot \text{①}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{④} - 4 \cdot \text{②}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y = [1 \ 3 \ 1 \ -4]^T.$$

Sen kan vi lösa $UX=y$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \\ \textcircled{-4} \textcircled{3} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 & -11 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \nearrow \\ \textcircled{-3} \textcircled{1} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 17/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \nearrow \\ \textcircled{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 17/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow x = [38 \ 16 \ 17/2 \ -4]^T.$$