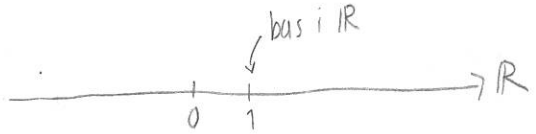
RÖ7.

- Ett **VEKTORRUM** är en mängd element som uppfyller vissa regler vid addition och multiplikation med en skalär.
- En **BAS** för ett vektorrum V är ett antal linjärt oberoende element i V som man kan få alla andra element i V från genom att ta linjär-kombinationer av baselementen

Typexempel på vektorrum och baser

$\mathbb{R}$: ett vektorrum av reella tal

En typisk bas för $\mathbb{R}$ är $\{1\}$



Genom linjärkombinationer av 1, dvs $c \cdot 1$ för någon konstant c kan vi få alla andra element i $\mathbb{R}$.

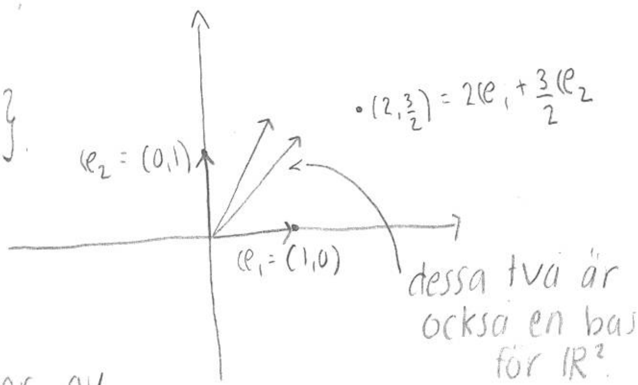
$\{1, 2\}$ är inte en bas för $\mathbb{R}$ för $2 = 2 \cdot 1$, dvs de är linjärt beroende.

Alla reella tal utom ett fungerar som bas för $\mathbb{R}$, vilket är det?

$\mathbb{R}^2$: ett vektorrum av par av reella tal

En typisk bas för $\mathbb{R}^2$ är $\left\{ \overset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$.

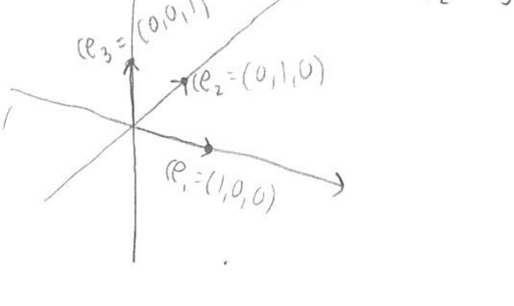
Vi kan få alla andra element i $\mathbb{R}^2$ genom $c_1 e_1 + c_2 e_2$.



Vilka som helst andra kombinationer av två element i $\mathbb{R}^2$ som inte är linjärt beroende funkar också att ta som bas

$\mathbb{R}^3$: ett vektorrum av tripplar av reella tal

En typisk bas är $\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, men vilka som helst tre andra vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är linjärt oberoende funkar som bas.



2.8.17. Är $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^3$?

$\mathbb{V}_1 \quad \mathbb{V}_2 \quad \mathbb{V}_3$

Det är tre vektorer i $\mathbb{R}^3$, så de är en bas om de är linjärt oberoende. Vi kollar det.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ vi ser att den enda

lösningen till $c_1\mathbb{V}_1 + c_2\mathbb{V}_2 + c_3\mathbb{V}_3 = \mathbb{0}$ är $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$

linjärt oberoende $\Rightarrow$ ja, det är en bas.

2.8.23. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Hitta baser för Col(A) och Nul(A).

$\mathbb{a}_1 \quad \mathbb{a}_2 \quad \mathbb{a}_3 \quad \mathbb{a}_4$

$\text{Col}(A) = \text{span}\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_4\} = \{c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3 + c_4\mathbb{a}_4 : c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\}$

$\text{Nul}(A) = \{\mathbb{x} : A\mathbb{x} = \mathbb{0}\}$ (Alla lösningar $\mathbb{x}$ till $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$)

Col(A): En bas ges av pivotkolonnerna i A.

Från den reducerade matrisen ser vi att det är kolumnerna 1 och 2. $\Rightarrow B_{\text{Col}A} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

Nul(A): Vi reducerar $[A \mid \mathbb{0}]$ fullständigt:

$$[A \mid \mathbb{0}] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$ x_3, x_4 fria

Eftersom alla lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kan skrivas på denna formen är

$$B_{Null(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4.1.11. Låt W vara alla vektorer på formen $\begin{bmatrix} 2b+3c \\ -b \\ 2c \end{bmatrix}$, b och c godtyckliga.

Hitta $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så att $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Vi ser att $\begin{bmatrix} 2b+3c \\ -b \\ 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} c$, där b och c är godtyckliga.

alltså är $W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

4.2.15. Hitta A så att $\left\{ \begin{bmatrix} 2s+t \\ r-s+2t \\ 3r+s \\ 2r-s-t \end{bmatrix} : r,s,t \in \mathbb{R} \right\}$ är $\text{Col}(A)$.

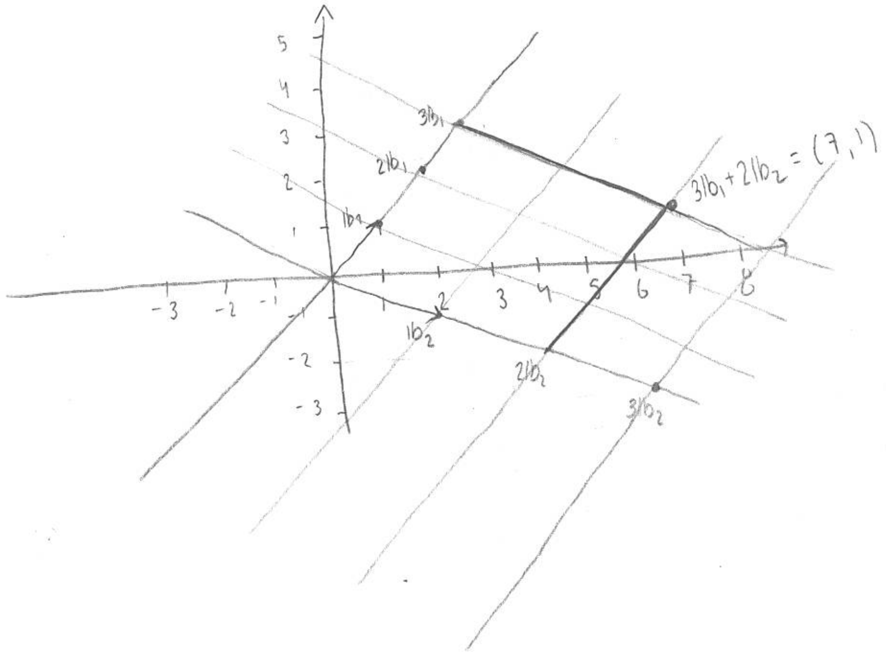
$$\begin{bmatrix} 2s+t \\ r-s+2t \\ 3r+s \\ 2r-s-t \end{bmatrix} = r \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_3}, \quad r,s,t \in \mathbb{R} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$$

$= \text{Col}(A)$ om $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ är kolumnerna i A, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

29.1. Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^2$. och $[\mathbf{x}]_B$ koordinaterna för en vektor $\mathbf{x}$ i basen B.. Hitta $\mathbf{x}$ och illustrera grafiskt. $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{x} = \underset{\mathbb{b}_1 \quad \mathbb{b}_2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} [\mathbf{x}]_B = 3\,\mathbb{b}_1 + 2\,\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$



29.5. vektorn $\mathbf{x}$ är i ett vektorrum H med bas $B = \{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

Beräkna $[\mathbf{x}]_B$. då $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Vi vill att $c_1\mathbb{b}_1 + c_2\mathbb{b}_2 = \mathbf{x}$, då är $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, vi löser

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -7 & 9 \\ -3 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

29.13. Hitta en bas för vektorrummet som spänns av $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ vilken är vektorrummets dimension?

Antingen är dessa vektorer linjärt oberoende och då en bas, eller så är de linjärt beroende och några vektorer är överflödiga. Vi kollar:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot-kolonner

$\Rightarrow$ basvektorer $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

Dimensionen är <u>antalet vektorer i basen</u>, dvs 3.