

QUIZ

Pivotelement

1. Vilka är pivotkolonnerna i $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

2. Vilka är pivotkolonnerna i $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$?

Baser

En bas för ett vektorrum V är ett antal linjärt oberoende vektorer som spänner upp hela V , dvs vi kan få alla element i V genom linjärkombinationer av basvektorerna. Om $\{w_1, w_2, w_3\}$ är en bas för V kan varje vektor w i V fås som

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 \quad \text{för några konstanter } c_1, c_2, c_3.$$

Dimensionen hos en bas är antalet vektorer i basen.

3. Kan $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^3$? Kan $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

det? varför?

$\mathbb{R}$ är ett vektorrum med alla reella tal som element/vektorer.

4. Hur många element ingår i varje bas för $\mathbb{R}$?

5. Hur många baser finns det för $\mathbb{R}$?

6. Finns något element i $\mathbb{R}$ som inte kan tas som bas?

Noll- och kolonnrum

A är en 4×6 -matris, $A = [a_1 \dots a_6]$. $\times$ nollmatrisen. Då är

$$\bullet \text{Col}(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_6\} = \{c_1 a_1 + \dots + c_6 a_6, c_1, \dots, c_6 \text{ konstanter}\}$$

• $\text{Nul}(A) = \{x: Ax=0\}$ = alla lösningar till $Ax=0$.

7. Vilken dimension kan $\text{Col}(A)$ som mest ha? (Tips: tänk på vad en bas ska uppfylla)
8. Vilken dimension kan $\text{Col}(A)$ som minst ha?
9. Vilken dimension kan $\text{Nul}(A)$ som mest ha? (Tips: tänk fria variabler)
10. Vilken dimension kan $\text{Nul}(A)$ som minst ha?
11. Hur hänger $\{b: b=Ax, x \in \mathbb{R}^6\}$ ihop med $\text{Col}(A)$?

Svar:

1. 1, 3, 4.

2. $A \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{2} & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$ alla kolumner.

3. Ingen av dem kan. Två vektorer kan inte spänna upp $\mathbb{R}^3$ (bara ett plan i $\mathbb{R}^3$) och fyra vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan inte vara linjärt oberoende.

4. Ett element. Vi kan få alla tal i $\mathbb{R}$ genom en konstant ggr det elementet.

5. Oändligt många. Alla tal skilda från 0 fungerar.

6. 0 går ej. T.ex. är inte $c \cdot 0 = 1$ för något c .

7. Kolumnerna har fyra element $\Rightarrow$ som mest fyra.

8. 1. Minst en vektor är linjärt oberoende eftersom A ej är nollmatrisen.

9. Minst en variabel är inte fri $\Rightarrow$ fem fria som mest $\Rightarrow 5$.

10. A är $4 \times 6 \Rightarrow$ minst två fria variabler $\Rightarrow 2$.

11. $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_6 a_6 = \text{span}\{a_1, \dots, a_6\} = \text{Col}(A)$

RÖ 8. KRYSSUPPGIFTER

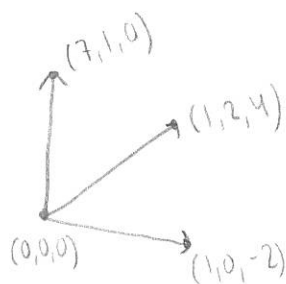
3.2.9. Beräkna $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ genom radreduktion.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{①} \rightarrow \text{③}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{①} \rightarrow \text{②}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

↗
två rader
byter plats

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

3.3.23. Beräkna volymen av parallelepipeden med ett hörn i $(0,0,0)$ och närliggande hörn i $(1,0,-2)$, $(1,2,4)$ och $(7,1,0)$.



$$V = |\det(A)|, \text{ där } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 7 \cdot 0 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 0 \\ = -2 + 28 - 4 = 22$$

$$\Rightarrow V = 22 \text{ v.e.}$$

2.9.11. Hitta baser för $\text{Col}(A)$ och $\text{Nul}(A)$ då

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -8 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ -3 & -6 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Vad är dimensionen hos $\text{Col}(A)$ och $\text{Nul}(A)$?

$\text{Col}(A)$: notera att kolumnerna 1 och 3 är pivotkolumner i $B \Rightarrow$
kolumnerna 1 och 3 i A bildar en bas för $\text{Col}(A)$.

$$B_{\text{Col}A} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim(\text{Col}(A)) = 2$ (2 vektorer i basen)

$$\text{Nul}(A): [A|0] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 - x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ alla lösningar till $Ax=0$ är på formen ovan

$$\Rightarrow B_{\text{Nul}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad \dim(\text{Nul}(A)) = 3$$

Notera att $\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A)) = \text{antalet kolumner i } A$.

Suppl. ex. 2.8. Hitta A så att $x \mapsto Ax$ mappar $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, då är $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow a + 3b = 1 \quad \Rightarrow a = 1 - 3b = 1 - 3 \cdot 1 = -2$$

$$c + 3d = 1 \quad \Rightarrow c = 1 - 3d = 1 - 3 \cdot (-1) = 4$$

$$2a + 7b = 3 \quad \Rightarrow 2(-2) + 7b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$2c + 7d = 1 \quad \Rightarrow 2(4) + 7d = 1 \Rightarrow d = -1$$

$$\text{så } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi testar att det stämmer: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ok!

Suppl. ex. 2.8. Hitta A så att $x \mapsto Ax$ mappar $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, då är $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow a + 3b = 1 \quad \Rightarrow a = 1 - 3b = 1 - 3 \cdot 1 = -2$$

$$c + 3d = 1 \quad \Rightarrow c = 1 - 3d = 1 - 3 \cdot (-1) = 4$$

$$2a + 7b = 3 \quad \Rightarrow 2 - 6b + 7b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$2c + 7d = 1 \quad \Rightarrow 2 - 6d + 7d = 1 \Rightarrow d = -1$$

$$\text{så } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi testar att det stämmer: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ok!