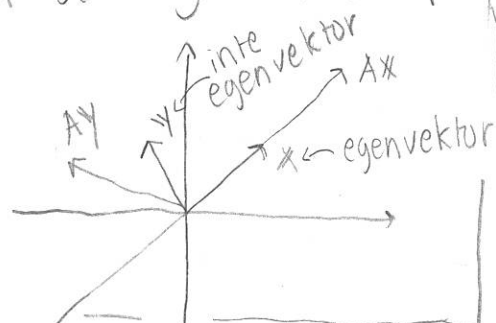


RÖ 9. EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

Låt A vara en $n \times n$ -matris. Om för något x och någon skalär λ

$$Ax = \lambda x,$$

är x en egenvektor till A och λ motsvarande egenvärde till A .



5.1.5. Är $x = [3 \ -2 \ 1]^T$ en egenvektor till $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$? Hitta egenvärdet λ isf.

• Vi kollar om $Ax = \lambda x$ för något λ .

$$Ax = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda x \Rightarrow \lambda = -5.$$

$\Rightarrow x$ är en egenvektor till A .

5.1.7. Är $\lambda = 4$ ett egenvärde till $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$? Hitta isf en tillhörande egenvektor?

• λ är ett egenvärde om $Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda \underbrace{I}_{x} x$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow [A - \lambda I \mid 0]$ har en nollskild lösning x .

$$[A - \lambda I \mid 0] = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5-\lambda & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{2} \textcircled{3} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{4} \\ \downarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

till exempel ($x_3=1$) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till A med $\lambda=4$.

vi testar om detta stämmer:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \overset{\lambda}{-4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{x} = \lambda x$$

5.1.17. Hitta egenvärdena till $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Om λ är ett egenvärde gäller att $(A - \lambda I)x = 0$ för något $x \neq 0$. Detta gäller om kolonnerna i $(A - \lambda I)$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(-2-\lambda) = \lambda(3-\lambda)(2+\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2.$$

Nu kommer tre uppgifter om DIAGONALISERING av en matris.

En diagonal matris är på formen $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}$

En matris A är diagonaliserbar om

$$A = PDP^{-1}$$

för någon diagonal matris D och inverterbar matris P .

om A har n linjärt oberoende egenvektorer $\{v_1, \dots, v_n\} \Leftrightarrow A$ diagonaliserbar

$$P = [v_1 \dots v_n] \text{ och } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

med $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ motsvarande egenvärden.

Så om man vill kolla om A är diagonaliserbar kan man kolla om A 's egenvektorer är linjärt oberoende.

5.3.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$. A är diagonaliserbar, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = PDP^{-1}. \text{ Beräkna } A^k, \text{ för } k \in \mathbb{N}.$$

Om $A = PDP^{-1}$ gäller att $A^k = PD^kP^{-1}$, där $D^k = \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix}$,

$$\text{så } A^k = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(-3)^{k+1} & (-2)^{k+1} \\ 2 \cdot (-3)^k & -(-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)^{k+1} + (-2)^{k+2} & -2(-3)^{k+1} + 3(-2)^{k+1} \\ -2(-3)^k - (-2)^{k+1} & 4(-3)^k - 3(-2)^k \end{bmatrix}$$

5.3.5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = PDP^{-1}$

Hitta egenvärdena till A och en bas för varje egenrum

om $A = PDP^{-1}$ är A 's egenvärden på diagonalen i D , och motsvarande egenvektorer kolonnerna i P , så

$\lambda_1 = \lambda_3 = 3$; med $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kolumn 3 i P .
↑ kolumn 1 i P

Alla vektorer på formen $c_1 w_1 + c_2 w_2$ är då egenvektorer till A och $\{w_1, w_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för egenrummet till $\lambda = 3$

$\lambda_2 = 2$; med $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Alla vektorer på formen $c w_2$ är då egenvektorer till A och $\{w_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för egenrummet till $\lambda = 2$.

5.3.11. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ då $\lambda = -1, 5$ är egenvärden till A .

Vi vet att P innehåller egenvektorer till A om de är linjärt oberoende, annars är A inte diagonaliserbar. $\Rightarrow$ hitta egenvektorer.

$$\underline{\lambda = -1}: [A - \lambda I | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ är egenvektorer till } \lambda = -1.$$

$\underbrace{\quad}_{v_1} \quad \underbrace{\quad}_{v_2}, v_1, v_2 \text{ är linjärt oberoende!}$

$$\underline{\lambda = 5}: [A - \lambda I | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{5} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{5} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \downarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ är egenvektorer till } \lambda = 5.$$

$\underbrace{\quad}_{v_3}$

Vi vet att egenvektorer som hör till olika egenvärden är linjärt oberoende (enl. en sats på s. 270 i boken), så $\{v_1, v_2, v_3\}$ är tre linjärt oberoende egenvektorer

$$\Rightarrow P = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

obs! • viktigt att egenvärden och egenvektorer som hör ihop hamnar på samma plats!

- om vi bara hade fått en egenriktning till $\lambda = -1$ hade A ej varit diagonaliserbar!
- Man kan ta vilken egenvektor som helst i samma riktning som egenvektorn, dvs i detta exemplet spelar det ingen roll om vi tar $[1 \ 2 \ 3]^T$ eller $[1/3 \ 2/3 \ 1]^T$ eller t.ex. $[10 \ 20 \ 30]^T$.