

RÖ 10. KRYSSUPPGIFTER

4.4.13. $B = \{ \underset{b_1}{1+t^2}, \underset{b_2}{t+t^2}, \underset{b_3}{1+2t+t^2} \}$ är en bas för $\mathbb{P}_2$.

Hitta koordinatvektorn för $p(t) = 1+4t+7t^2$ i basen B .

Att hitta koordinatvektorn innebär att hitta $[a \ b \ c]^T$ så att

$$p(t) = 1+4t+7t^2 = a \cdot b_1 + b \cdot b_2 + c \cdot b_3 = a(1+t^2) + b(t+t^2) + c(1+2t+t^2) = 1 \cdot (a+c) + t \cdot (b+2c) + t^2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c = 1 \\ b+2c = 4 \\ a+b+c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(-\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{(-\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow [a \ b \ c]^T = [2 \ 6 \ -1]$$

4.7.19. Låt $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $W_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $W_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

a) Hitta en bas $\{u_1, u_2, u_3\}$ för $\mathbb{R}^3$ så att P är matrisen som byter koordinater från basen $\{u_1, u_2, u_3\}$ till basen $\{W_1, W_2, W_3\}$.

Låt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ och $C = \{W_1, W_2, W_3\}$.

Om vi har en punkt x uttryckt i B , dvs $[x]_B$, får vi x uttryckt i C genom $[x]_C = P_{C \leftarrow B} [x]_B$, och

$$P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [u_1]_C & [u_2]_C & [u_3]_C \end{bmatrix}, \text{ så}$$

$$[u_1]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = 1 \cdot w_1 + (-3) \cdot w_2 + 4 \cdot w_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$[u_2]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$[u_3]_C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_3 = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Alternativt: Det gäller att

$$X = [u_1 \ u_2 \ u_3] [X]_B = [w_1 \ w_2 \ w_3] [X]_C = [w_1 \ w_2 \ w_3] P [X]_B$$

$$\Rightarrow [u_1 \ u_2 \ u_3] = [w_1 \ w_2 \ w_3] P = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 & -5 \\ -5 & -9 & 0 \\ 21 & 32 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Hitta en bas $E = \{w_1, w_2, w_3\}$ så att P är basbytmatrisen från $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ till E , dvs $[X]_E = P[X]_C$.

$$\text{Det gäller att } X = [w_1 \ w_2 \ w_3] [X]_C = [w_1 \ w_2 \ w_3] [X]_E$$

$$= [w_1 \ w_2 \ w_3] P [X]_C \Rightarrow [X]_C \text{ kan strykas}$$

$$\Rightarrow [w_1 \ w_2 \ w_3] = [w_1 \ w_2 \ w_3] P$$

$$\Rightarrow [w_1 \ w_2 \ w_3] = [w_1 \ w_2 \ w_3] P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 38 & 21 \\ -9 & -13 & -7 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow E = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 28 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 \\ -13 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$w_1 \quad w_2 \quad w_3$

5.2.13. Hitta den karakteristiska ekvationen för $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 0 \\ 5 & 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{cofactor along column 3}\} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((6-\lambda)(9-\lambda) - 4)$$

$$= (3-\lambda)(54 - 6\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 4) = (3-\lambda)(50 - 15\lambda + \lambda^2)$$

$$= 150 - 45\lambda + 3\lambda^2 - 50\lambda + 15\lambda^2 - \lambda^3 = 150 - 95\lambda + 18\lambda^2 - \lambda^3$$

5.3.13. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ då $\lambda = 1, 5$.

$A = PDP^{-1}$ om $\{v_1, v_2, v_3\}$ är tre linjärt oberoende egenvektorer till A .
Då är $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, där $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är egenvärden tillhörande v_1, v_2, v_3 .

Hitta egenvektorer till givna egenvärden:

$$\underline{\lambda = 1}: Ax = 1 \cdot x \Leftrightarrow Ax = \underbrace{1 \cdot I}_{x} x \Leftrightarrow (A - I)x = 0$$

$$[A - I | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{row operations}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} v_2 \\ v_1 \end{matrix} \quad \text{två linjärt oberoende egenvektorer!}$$

$$\lambda = 5: A\mathbb{x} = 5\mathbb{x} \Leftrightarrow (A - 5I)\mathbb{x} = (0)$$

$$[A - 5I | (0)] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{v}_3$ egenvektor nr 3, linjärt oberoende med

$\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2$ eftersom de är egenvektorer till skilda egenvärden.

$$\Rightarrow A \text{ är diagonaliserbar med } P = [\mathbb{v}_1 \ \mathbb{v}_2 \ \mathbb{v}_3] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

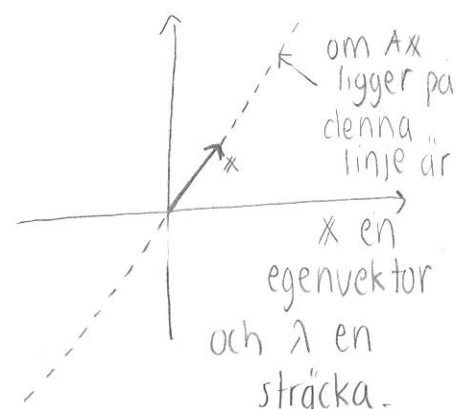
$$\text{och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

QUIZ (EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER)

om A är en $n \times n$ -matris och det finns någon vektor $\mathbb{x}$ och skalär λ så att

$$A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}$$

är $\mathbb{x}$ en egenvektor och λ ett egenvärde till A .



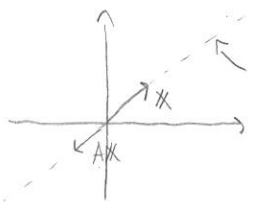
1. Varifrån kommer ekvationen $(A - \lambda I)\mathbb{x} = (0)$; som är den man vill lösa då man letar egenvärden och egenvektorer till A ?

2. Varför vill man lösa $\det(A - \lambda I) = 0$ då man vill hitta egenvärden?
(Tips: nollvektorn är ingen egenvektor)

3. Hur många olika egenvärden kan A som mest ha?
4. Hur kan 0 vara ett egenvärde till A fast nollvektorn, (0) , inte är någon egenvektor?
5. Vad gäller för kolumnerna i A om 0 är ett egenvärde, och varför?
6. Hur många linjärt oberoende egenvektorer kan A som mest ha?
7. Hur många egenvektorer har A ?

Svar:

1. Egenvärden /-vektorer uppfyller $Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda \underbrace{I}_{x} x$
 $\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = (0)$
2. Om $(A - \lambda I)x = (0)$ ska ha en nollskild lösning måste kolumnerna i $A - \lambda I$ vara linjärt oberoende $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.
 (Annars kan vi radreducera $[A - \lambda I | (0)]$ till $[I | (0)] \Leftrightarrow x = (0)$)
3. n st.
4. Om $\lambda = 0$ ska vara ett egenvärde måste $Ax = 0x = (0)$, så om $Ax = (0)$ har en nollskild lösning x är x en egenvektor till $\lambda = 0$.
5. $Ax = (0)$ har en nollskild lösning $x \Leftrightarrow$ kolumnerna i A är linjärt beroende om 0 är ett egenvärde.
6. A är $n \times n \Rightarrow$ egenvektorer är $n \times 1$. Det kan som mest finnas n st $n \times 1$ -vektorer som är linjärt oberoende.
7. Oändligt många! Om w är en egenvektor gäller $Aw = \lambda w$, då gäller även $A(2w) = 2Aw = 2\lambda w = \lambda(2w)$, så $2w$ är också en egenvektor. samma gäller för vilket annat tal c som helst istället för 2 . $\Rightarrow$ oändligt många.



alla vektorer på denna linjen är egenvektorer om x är en egenvektor.