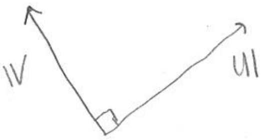
Ö10. ORTOGONALITET OCH PROJEKTION

Ortogonalitet

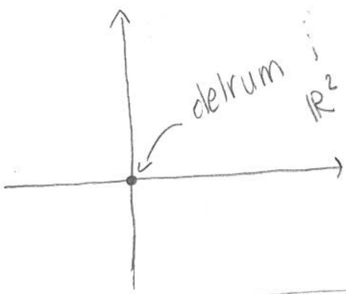
Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala om $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.
Det innebär att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är 90° eftersom $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cdot\cos\theta$.

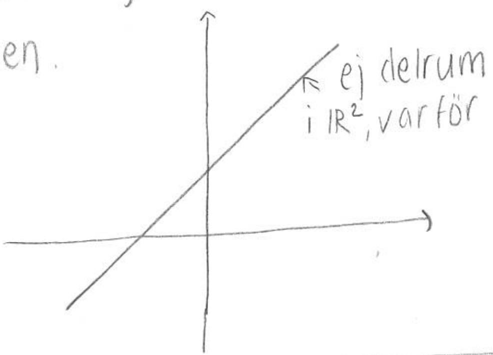


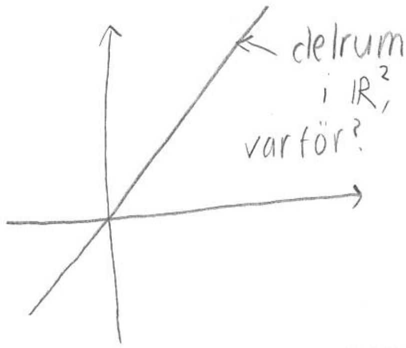
Delrum

Ett delrum av $\mathbb{R}^n$ är en delmängd av $\mathbb{R}^n$ som uppfyller

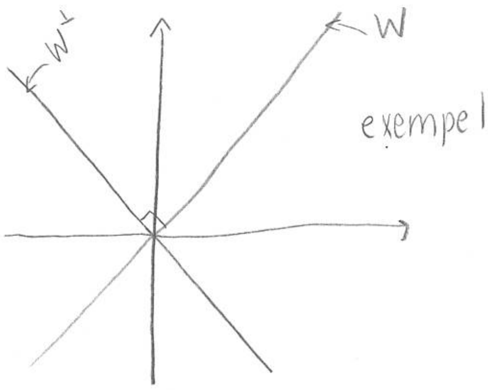
1. Nollvektorn finns i delmängden
2. om $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ finns i delmängden finns $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i delmängden
3. om $\mathbf{u}$ finns i delmängden och c är en konstant finns $c\cdot\mathbf{u}$ i delmängden.







6.1.30. Låt W vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$ och $W^\perp$ vara alla vektorer som är ortogonala mot W. Visa att $W^\perp$ är ett delrum av $\mathbb{R}^n$.



Vi behöver visa att de tre villkoren ovan gäller.

1. Är $\mathbf{0}$ ortogonal mot W?
Tag en godtycklig vektor $\mathbf{u}\in W$, då är
$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{0}\in W^\perp$$

2. Tag $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ i $W^\perp$ och $\mathbf{u}\in W$. Då gäller att $\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{u} = 0$ och $\mathbf{z}_2\cdot\mathbf{u} = 0$
$$(\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{z}_1\cdot\mathbf{u} + \mathbf{z}_2\cdot\mathbf{u} = 0+0 = 0 \Rightarrow \mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2 \in W^\perp$$

3. Tag $\mathbf{z}$ i $W^\perp$ och $\mathbf{u}$ i W, dvs $\mathbf{z}\cdot\mathbf{u} = 0$. Då gäller för godtyckligt c
$$(c\mathbf{z})\cdot\mathbf{u} = c(\mathbf{z}\cdot\mathbf{u}) = c\cdot 0 = 0 \Rightarrow c\mathbf{z}\in W^\perp$$

1, 2, 3 är uppfyllda $\Rightarrow W^\perp$ är ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

6.2.9. Visa att $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ är en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ och uttryck x i B, då

$u_1 = [1 \; 0 \; 1]^T$, $u_2 = [-1 \; 4 \; 1]^T$, $u_3 = [2 \; 1 \; -2]^T$, $x = [8 \; -4 \; -3]^T$

Om $\{u_1, u_2, u_3\}$ är parvis ortogonala är de linjärt oberoende. Eftersom de är tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är de då en bas.

$u_1 \cdot u_2 = [1 \; 0 \; 1]^T \cdot [-1 \; 4 \; 1]^T = -1 + 0 + 1 = 0$

$u_1 \cdot u_3 = 2 + 0 + (-2) = 0$ $\Rightarrow$ parvis ortogonala

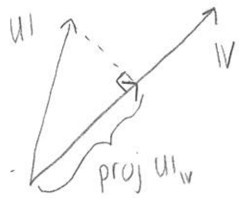
$u_2 \cdot u_3 = -2 + 4 - 2 = 0$ $\Rightarrow$ bas för $\mathbb{R}^3$

x kan uttryckas i B genom att projicera x på varje basvektor. På så sätt får vi reda på hur långt vi ska gå längs varje basvektor för att få x, dvs vi får fram $[x]_B$. Detta fungerar bara om B är en ortogonal bas.

Projektion

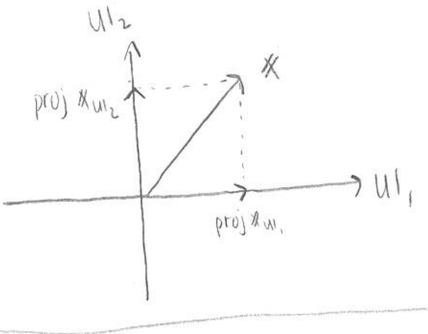
Projektionen av en vektor u på en annan vektor v ges av

$$\text{proj}\, u_v = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$



ex) om $B = \{u_1, u_2\}$ är en ortogonal bas för $\mathbb{R}^2$ är

$$x = \text{proj}\, x_{u_1} + \text{proj}\, x_{u_2} = \underbrace{\frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}}_{c_1} u_1 + \underbrace{\frac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}}_{c_2} u_2$$



och $[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

Vi får $[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ där $c_1 = \dfrac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = \dfrac{8 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = \dfrac{5}{2}$

$$c_2 = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2} = \frac{8\cdot(-1) - 4\cdot 4 - 3\cdot 1}{(-1)\cdot(-1) + 4\cdot 4 + 1\cdot 1} = \frac{-27}{18} = -\frac{3}{2}$$

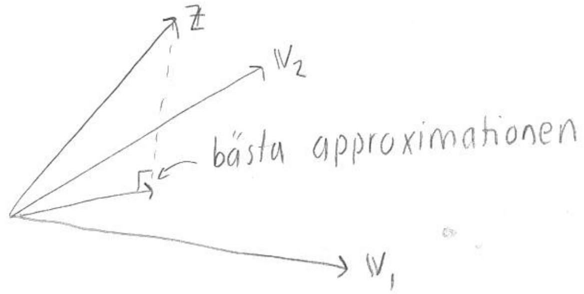
$$\Rightarrow [\mathbf{x}]_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3} = \frac{8\cdot 2 - 4\cdot 1 + (-3)\cdot(-2)}{2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{5}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$$

6.3.13. Hitta bästa approximationen av $\mathbf{z} = [3\ -7\ 2\ 3]^T$ på formen $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ då $\mathbf{v}_1 = [2\ -1\ -3\ 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [1\ 1\ 0\ -1]^T$.

Bästa approximationen $\hat{\mathbf{z}}$ får vi om vi projicerar $\mathbf{z}$ på "planet" som spänns av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$



$$\hat{\mathbf{z}} = \underbrace{\frac{\mathbf{z}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}}_{c_1}\mathbf{v}_1 + \underbrace{\frac{\mathbf{z}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}}_{c_2}\mathbf{v}_2 \Rightarrow$$

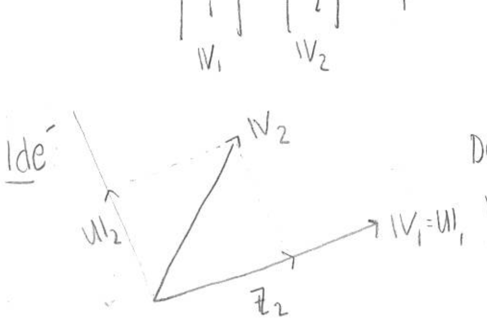
$$c_1 = \frac{3\cdot 2 + (-7)\cdot(-1) + 2\cdot(-3) + 3\cdot 1}{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$c_2 = \frac{3\cdot 1 + (-7)\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1)}{1^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{-7}{3}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{z}} = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{7}{3}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6.4.3. $\left\{ \underset{\mathbf{v}_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{v}_2}{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}} \right\}$ är en bas för ett delrum W. Använd Gram-Schmidt-processen för att hitta en ortogonal bas för W.

Idé



Dela upp $\mathbf{v}_2$ i en komponent parallell med $\mathbf{v}_1$ ($\mathbf{z}_2$) vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$ ($\mathbf{u}_2$) och låt $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Då är $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en ortogonal bas.

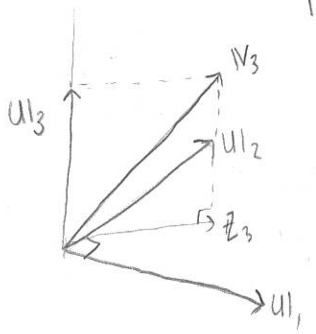
1. Låt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$
2. Hitta $\mathbf{z}_2 = \text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \frac{2\cdot 4 + (-5)\cdot(-1) + 1\cdot 2}{2^2 + (-5)^2 + 1^2}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{15}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Då är $\mathbb{u}_2 = \mathbb{v}_2 - \mathbb{z}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\3\\3\end{bmatrix}$

3. Vår ortogonala bas är $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3/2\\3/2\end{bmatrix} \right\}$

Om vi skulle haft en till vektor i basen, säg $\mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

Hade vi fått fortsätta
och dela upp $\mathbb{v}_3$ i en vektor
i samma plan som $\mathbb{u}_1$ och $\mathbb{u}_2$ $(\mathbb{z}_3)$
en ortogonal mot planet. Då är
$\mathbb{u}_3$ den tredje basvektorn



$$\mathbb{z}_3 = \operatorname{proj} \mathbb{v}_{3\,\mathbb{u}_1} + \operatorname{proj} \mathbb{v}_{3\,\mathbb{u}_2} = \frac{\mathbb{v}_3 \cdot \mathbb{u}_1}{\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1} \mathbb{u}_1 + \frac{\mathbb{v}_3 \cdot \mathbb{u}_2}{\mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_2} \mathbb{u}_2 \quad \text{och}$$

$\mathbb{u}_3 = \mathbb{v}_3 - \mathbb{z}_3$.

Det spelar ingen roll vilken av vektorerna $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ vi börjar med!