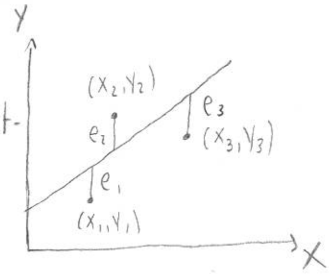
RÖ 12. KRYSSUPPGIFTER + MINSTA-KVADRATMETODEN M.M.

Minsta-kvadratmetoden

Ibland har man ett överbestämt system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dvs med fler ekvationer än obekanta som inte går att lösa exakt. Med minsta-kvadratmetoden får man en approximativ lösning genom att istället lösa

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}, \quad \text{(normalekvationerna)}$$

som **har** en lösning.



Man kan t.ex. vilja anpassa en rät linje $y = kx + m$ till punkterna i figuren, men som vi ser finns inga k och m som gör att linjen går genom alla punkter. Med m.k.m. hittar vi den linje som minimerar felet $\sum_i e_i^2$

Vi vill lösa $\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \\ y_3 = kx_3 + m \end{cases}$ eller $\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$, som är överbestämt.

Därför löser vi $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ och får $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ enligt figuren.

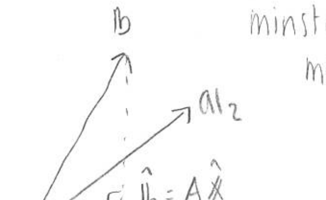
6.5.3. Hitta en minsta-kvadratlösning $\hat{\mathbf{x}}$ till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \end{array}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vi vill lösa $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{b}$ finns inte i Col A eftersom $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Då hittar vi med minsta-kvadratmetoden den lösn. $\hat{\mathbf{x}}$ som gör att $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$,



$\hat{\mathbf{b}}$ är projektionen av $\mathbf{b}$ på Col A.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 42 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 36 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7.1.10. Är $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ortogonal?

$\qquad\quad a_1 \quad a_2 \quad a_3$

OBS! Att en matris är ortogonal innebär att dess kolumner är ortonormala

A är ortogonal om kolumnerna i A är ortogonala och normerade $\iff A^TA = I$.

Vi ser direkt att $\|a_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \neq 1 \Rightarrow$ alla kolumner ej normerade

(Dock är de ortogonala $a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot a_3 = a_2 \cdot a_3 = 0$)

7.1.20. Matrisen A är diagonaliserbar $A = PDP^{-1}$ med P en ortogonal matris, dvs $P^{-1} = P^T$ (och $A = PDP^T$). Hitta P och D då

$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ har egenvärden $\lambda = 13, 7, 1$.

P innehåller normerade egenvektorer till A, hitta dessa.

$\lambda = 13$: $[A - \lambda I \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} (-1) & (-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \frac{1}{2}x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 7$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \frac{1}{2}x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} (-1) & (-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] (-1)(1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \mathbb{X} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Eftersom A är symmetrisk vet vi att A är diagonaliserbar med P en ortogonal matris som innehåller $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$, $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = P^T$ och $D = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.7.5. Lös $\mathbb{X}'(t) = A\mathbb{X}(t)$, $t \geq 0$, då $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbb{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Är origo en attraktionspunkt, repulsionspunkt eller sadelpunkt? Hitta riktningarna med störst attraktion/repulsion.

om A är diagonaliserbar ges lösningen $\mathbb{X}(t)$ av

$$\mathbb{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbb{V}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbb{V}_2,$$

där $\lambda_{1,2}$ är egenvärden till A och $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ motsvarande linjärt oberoende egenvektorer.

1. Hitta egenvärden: $\det(A - \lambda I) = (7-\lambda)(3-\lambda) - (-1)\cdot 3 = 21 - 7\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 3$

$= \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 6)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4.$

2. Hitta motsvarande egenvektorer:

$\lambda = 6$: $[A - 6I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{X} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$: $[A - 4I \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{X} = \frac{1}{3}x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\mathbb{V}_1$ och $\mathbb{V}_2$ är linjärt oberoende $\Rightarrow$ A är diagonaliserbar och lösningen till

$\mathbb{X}'(t) = A\mathbb{X}(t)$ ges av $\mathbb{X}(t) = C_1 e^{6t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

För att hitta C_1 och C_2 använder vi oss av begynnelsevärdet $\mathbb{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

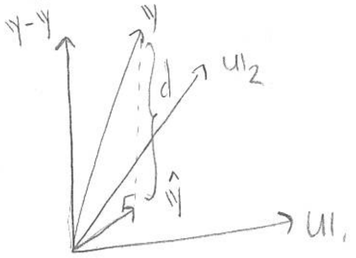
$\mathbb{X}(0) = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \overset{\curvearrowright}{\underset{(-1)}{}} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{x}(t) = \frac{7}{2} e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Eftersom <u>båda</u> egenvärdena är <u>positiva</u> är origo en <u>repulsionspunkt</u>

Riktningen av störst repulsion är egenvektorn som hör till det mest positiva egenvärdet, dvs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3.15. Låt $\mathbb{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbb{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna avståndet från $\mathbb{y}$ till planet i $\mathbb{R}^3$ som spänns av $\mathbb{u}_1$ och $\mathbb{u}_2$.



<u>Idé</u>: dela upp $\mathbb{y}$ i en komponent i planet ($\hat{\mathbb{y}}$) och en vinkelrät med planet ($\mathbb{y} - \hat{\mathbb{y}}$), där $\hat{\mathbb{y}}$ är projektionen av $\mathbb{y}$ på planet,

$$\hat{\mathbb{y}} = \text{proj}_{\mathbb{u}_1}\mathbb{y} + \text{proj}_{\mathbb{u}_2}\mathbb{y} = \frac{\mathbb{y} \cdot \mathbb{u}_1}{\mathbb{u}_1 \cdot \mathbb{u}_1} \mathbb{u}_1 + \frac{\mathbb{y} \cdot \mathbb{u}_2}{\mathbb{u}_2 \cdot \mathbb{u}_2} \mathbb{u}_2$$

$$= \frac{5 \cdot (-3) + (-9) \cdot (-5) + 5 \cdot 1}{(-3)^2 + (-5)^2 + 1^2} \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5 \cdot (-3) + (-9) \cdot 2 + 5 \cdot 1}{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{35}{35} \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(-28)}{14} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 6 \\ -5 - 4 \\ 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Då är minsta avståndet

$$d = \| \mathbb{y} - \hat{\mathbb{y}} \| = \sqrt{(5-3)^2 + (-9-(-9))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ l.e.}$$

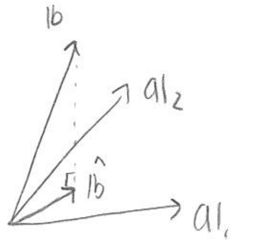
6.5.9. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Beräkna

a) ortogonalprojektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}(A)$

b) en minsta-kvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Lösning:

a) $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, där $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$.



$$\hat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_{\mathbf{a}_1}\mathbf{b} + \mathrm{proj}_{\mathbf{a}_2}\mathbf{b}$$

$$= \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2$$

$$= \frac{4\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + (-3)\cdot(-2)}{1^2 + 3^2 + (-2)^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{4\cdot 5 + (-2)\cdot 1 + (-3)\cdot 4}{5^2 + 1^2 + 4^2}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{6}{42}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Minsta-kvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ fås från $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$[A^TA \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 0 & 4 \\ 0 & 42 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{array}\right] \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

Vi ser att projektionen på kolonnrummet $\mathrm{Col}(A)$ fås genom att gå så långt som minsta-kvadratlösningen säger längs varje kolumn i A!

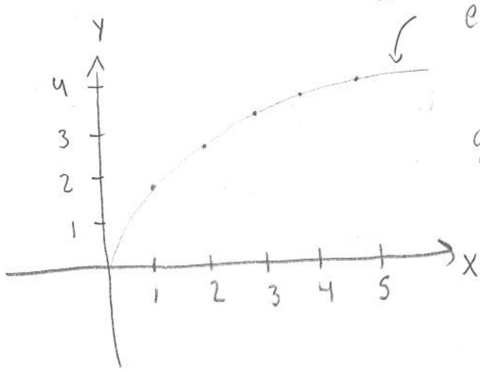
6.6.7. a) I ett experiment får man datapunkterna

X	1	2	3	4	5
Y	1.8	2.7	3.4	3.8	3.9

De ska anpassas till en kurva på formen $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$ med minsta-kvadratmetoden. Beskriv ekvationssystemet.

Vi vill lösa

$$Y_1 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 \qquad 1.8 = \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 1$$
$$Y_2 = \beta_1 X_2 + \beta_2 X_2^2 \quad \text{eller} \quad 2.7 = \beta_1 \cdot 2 + \beta_2 \cdot 4$$
$$\vdots$$
$$Y_5 = \beta_1 X_5 + \beta_2 X_5^2 \qquad 3.9 = \beta_1 \cdot 5 + \beta_2 \cdot 16$$



Vi vill anpassa en andragradskurva genom origo till datan.

som på matrisform kan skrivas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.8 \\ 2.7 \\ 3.4 \\ 3.8 \\ 3.9 \end{bmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

(A designmatris, $\mathbb{x}$ parametervektor, $\mathbb{b}$ observationsvektor)

Detta är fem ekvationer och två obekanta, ett överbestämt system utan lösning, därför vill vi hitta en approximativ minsta-kvadratlösning.

Den fås från $A^T A \hat{\mathbb{x}} = A^T \mathbb{b}$, som <u>har</u> en lösning.