

Rö 13. KRYSSUPPGIFTER

6.4.9. Hitta en ortogonal bas för $\text{Col}(A)$, då $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$.

Först hittar vi en bas för $\text{Col}(A)$ genom att se vilka kolumner som innehåller pivotelement

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ alla kolumner pivot $\Rightarrow B = \left\{ \underset{b_1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}} \right\}$ är en bas för $\text{Col } A$.

Nu vill vi ortogonalisera B , vi vill hitta en ny bas $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ med $v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$.

1. Låt $v_1 = b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^T$

2. Hitta $v_2 = b_2 - \text{proj}_{v_1} b_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} - \frac{(-5) \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + (-7) \cdot 3}{3^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + \frac{40}{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Hitta $v_3 = b_3 - \text{proj}_{v_1} b_3 - \text{proj}_{v_2} b_3 = b_3 - \frac{b_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{b_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 8 \cdot 3}{3^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 8 \cdot (-1)}{1^2 + 3^2 + 3^2 + (-1)^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{30}{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{10}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 9/2 + 1/2 \\ 1 - 3/2 + 3/2 \\ -2 + 3/2 + 3/2 \\ 8 - 9/2 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Man kan kolla att} \\ v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0 \end{array} \right)$$

6.4.13. Låt $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ och $Q = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \\ -3/6 & 1/6 \\ 1/6 & 3/6 \end{bmatrix}$, Q har fått från Gram-Schmidtprocessen på kolumnerna i A . Hitta en uppåt triangulär matris R så att $A = QR$. Kontrollera resultatet.

$$Q \cdot R = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \\ -3/6 & 1/6 \\ 1/6 & 3/6 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = A$$

R

Eftersom Q har fått från Gram-Schmidtprocessen är kolumnerna i Q ortogonala. Nu är kolumnerna dessutom normerade

$$\|q_1\|^2 = \frac{5^2 + 1^2 + (-3)^2 + 1^2}{6^2} = \frac{25 + 1 + 9 + 1}{36} = 1$$

$$\|q_2\|^2 = \frac{(-1)^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2}{6^2} = \frac{1 + 25 + 1 + 9}{36} = 1$$

därmed är Q en ortogonal matris, $Q^T Q = I$ (obs! Q har ingen invers eftersom den inte är kvadratisk)

Vi får

$$A = QR \Rightarrow Q^T A = \underbrace{Q^T Q}_I R \Rightarrow R = Q^T A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 36 & 72 \\ 0 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$QR = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = A, \text{ OK!}$$

7.1.17. Ortogonaldagonalisera $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dvs hitta en ortogonal matris

P och en diagonal matris D så att $A = P D P^{-1} = P D P^T$, då $\lambda = 5, 2, -2$ är egenvärden till A .

Eftersom A är symmetrisk, $A = A^T$, är egenvektorer till olika egenvärden ortogonala och A är diagonaliserbar med P en ortogonal matris

$P = [w_1, w_2, w_3]$, där w_1, w_2, w_3 är ortogonala egenvektorer till A .

Hitta egenvektorerna till A :

$$\lambda = 5: [A - 5I | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+4 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+2 \cdot 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow X = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{normera } v_1$$

$$\lambda = 2: [A - 2I | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+1 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+2 \cdot 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow X = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{normera } v_2$$

$$\lambda = -2: [A + 2I | 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-3 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-1 \cdot 14} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-5 \cdot 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow X = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{normera } v_3$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

7.2.9. Klassificera den kvadratiske formen $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = Q(x_1, x_2)$
Gör ett variabelbyte $x = Py$ som transformerar Q till en kvadratisk form utan blandtermer.

$$Q(x) = x^T A x, \text{ där } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ och } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{framför } x_1 \\ \text{halva värdet framför } x_1, x_2 \\ \text{framför } x_2 \end{array}$$

Klassificeringen: beror på egenvärdena till A .

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(6 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7.$$

Alla egenvärden positiva $\Rightarrow Q$ positivt definit, dvs $Q(x) > 0, \forall x$.

Transformation: $P = [v_1, v_2]$ där v_1, v_2 är ortonormala egenvektorer till A .

$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②} \leftarrow \text{②} + 2\text{①}} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 7: \begin{bmatrix} -4 & -2 & | & 0 \\ -2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{x_2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad x = P y \Rightarrow y = P^{-1} x = P^T x$$

$$Q(x) = x^T A x = (P y)^T A (P y) = y^T \underbrace{(P^T A P)}_D y = Q(y)$$

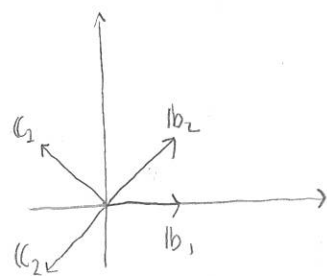
vi vet att $A = P D P^T$ eftersom A är symmetrisk, därför är $D = P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow Q(y) = y^T D y = [y_1, y_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2y_1^2 + 7y_2^2 \quad \text{där } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y = P^T x = P^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Basbyte

Antag att vi har två olika baser B och C för ett vektorrum, t.ex. vektorrummet $\mathbb{R}^2$.

Om $B = \{b_1, b_2\}$, där $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och



$D = \{d_1, d_2\}$ där $d_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ kan varje vektor/punkt p i $\mathbb{R}^2$

uttryckas i basen B som $p = c_1 b_1 + c_2 b_2 = [b_1, b_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, då är $[p]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

eller i basen D som $p = k_1 d_1 + k_2 d_2 = [d_1, d_2] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, då är $[p]_D = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

T.ex. punkten $p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ kan uttryckas i de olika baserna som

$$p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [b_1, b_2] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [b_1, b_2] [p]_B \Rightarrow [p]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = [d_1, d_2] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = [d_1, d_2] [p]_D \Rightarrow [p]_D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$[p]_B$ och $[p]_D$ beskriver hur långt vi ska gå längs varje basvektor för

att komma till p . $p = [b_1, b_2] [p]_B = [d_1, d_2] [p]_D$ (*)

Man kan vilja byta vilken bas man beskriver p i, hur får man t.ex. $[p]_B$ om man vet $[p]_D$ eller tvärt om?

Från (*)

$$p = [b_1, b_2] [p]_B = [d_1, d_2] [p]_D$$

Basbyttematriser

$$P_{B \leftarrow D} = [b_1, b_2]^{-1} [d_1, d_2]$$

$$P_{D \leftarrow B} = [d_1, d_2]^{-1} [b_1, b_2]$$

kan vi lösa ut det vi vill ha. Vi får

$$[p]_B = [b_1, b_2]^{-1} [d_1, d_2] [p]_D, \quad (1)$$

$$[p]_D = [d_1, d_2]^{-1} [b_1, b_2] [p]_B. \quad (2)$$

I vårt exempel har vi $[b_1, b_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[d_1, d_2]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi får

$$(1): [p]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ok!}$$

$P_{B \leftarrow D}$

$$(2): [p]_D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ok!}$$

$P_{D \leftarrow B}$

om vi har fler vektorer i basen, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ och $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ får vi

$$[p]_B = [b_1, \dots, b_n]^{-1} [d_1, \dots, d_n] [p]_D \quad \text{och tvärt om}$$