RÖ14. KRYSSUPPGIFTER + UNDERRUM

2.5.17. Använd att $A = LU$ för att beräkna inversen av $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ då

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Kom ihåg att $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ om B och C är inverterbara.

Vi får $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$, med

U^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (\tfrac{1}{2}) \\ (\tfrac{-1}{4}) \\ (\tfrac{-1}{2}) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (2)\ (-2) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (3) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/4 & -2 \\ 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

L^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/4 & -2 \\ 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5/4 & -2 \\ 3/2 & 3/4 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

3.1.27. Beräkna $\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 1 \cdot 1 = K$$

4.3.15. Hitta en bas för span$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

om vi kallar vektorerna $\{a_1, \dots, a_5\}$ och sätter dem i en matris $A = [a_1 \ \dots \ a_5]$ är span$\{a_1, \dots, a_5\} = \mathrm{Col}(A)$.

En bas för $\mathrm{Col}(A) =$ span$\{a_1, \dots, a_5\}$ ges av pivotkolumnerna i A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -8 & 10 & -6 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (2)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 14 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2)\ (-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

pivotkolumner

$$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_4, a_5\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

är en bas för spannet.

5.3.19. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ om möjligt, dvs hitta P och D så att $A = PDP^{-1}$.

1. Hitta egenvärden. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ (eftersom A är triangulär finns egenvärdena på diagonalen)

2. Hitta egenvektorer

$\lambda = 5$: $[A - 5I \mid 0] =$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-\frac{1}{3}) \\ \\ (-\frac{1}{3}) \\ (-\frac{1}{3}) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{X} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 3}$: $$[A - 3I \mid \mathbb{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{X} = x_2 \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 2}$: $$[A - 2I \mid \mathbb{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{X} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så $P = [\mathbb{v}_1 \ \mathbb{v}_2 \ \mathbb{v}_3 \ \mathbb{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Underrum

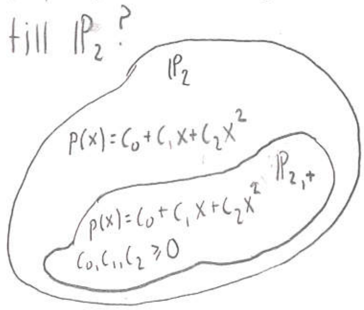
Ett vektorrum V är en mängd av element/vektorer som uppfyller vissa krav då man adderar dem och multiplicerar dem med en skalär

Ett underrum till V är en delmängd S av V

Som uppfyller

1. Nollvektorn i V finns i S
2. om u och w finns i S ska $u+w$ finnas i S.
3. om u finns i S ska $c \cdot u$ finnas i S, då c är en konstant.

Exempel: ① Alla polynom av grad 2, $\mathbb{P}_2$, är ett vektorrum. Är alla polynom av grad 2 med positiva koefficienter (eller noll), $\mathbb{P}_{2,+}$, ett underrum till $\mathbb{P}_2$?



Vi kollar:

1. "Nollvektorn" är polynomet $p_0 = 0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$,
$c_0 = c_1 = c_2 = 0 \geq 0$ ok!

2. Tag $p_1 = c_0 + c_1x + c_2x^2$ och $p_2 = d_0 + d_1x + d_2x^2$ i $\mathbb{P}_{2,+}$, dvs $c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2 \geq 0$

Då är $p_1 + p_2 = c_0 + c_1x + c_2x^2 + d_0 + d_1x + d_2x^2 = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 \in \mathbb{P}_{2,+}$

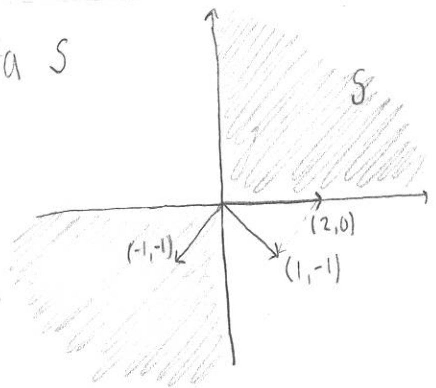
eftersom $c_0, d_0 \geq 0 \Rightarrow c_0 + d_0 \geq 0$
$c_1, d_1 \geq 0 \Rightarrow c_1 + d_1 \geq 0$
$c_2, d_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 + d_2 \geq 0$

3. Tag $p_1 = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{P}_{2,+}$ och en godtycklig konstant a.

Då är $a \cdot p_1 = ac_0 + ac_1x + ac_2x^2$.
Finns ap_1 i $\mathbb{P}_{2,+}$? Inte om a är negativt! Då är $ac_0 \leq 0$, $ac_1 \leq 0$, $ac_2 \leq 0$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}_{2,+}$ är inte ett delrum i $\mathbb{P}_2$ eftersom 3. inte gäller för vilka konstanter som helst.

(2) $\mathbb{R}^2$ är ett vektorrum. Är detta S



ett delrum av $\mathbb{R}^2$?

Vi ser att $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \geq 0 \right\}$. (x och y positiva eller x och y negativa)

<u>Vi kollar</u>:

1. Finns $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i S? Ja, eftersom $0 \cdot 0 \geq 0$. (vi ser det också från bilden) ok!

2. Tag $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $\mathbb{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ i S, dvs $x_1 \cdot x_2 \geq 0$ och $y_1 \cdot y_2 \geq 0$. Finns $\mathbb{x} + \mathbb{y}$ i S?

$$\mathbb{x} + \mathbb{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \qquad (x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = \underbrace{x_1 x_2}_{\geq 0} + x_1 y_2 + y_1 x_2 + \underbrace{y_1 y_2}_{\geq 0} \overset{?}{\geq} 0$$

dessa är negativa om $\mathbb{x}$ och $\mathbb{y}$ ligger i olika kvadranter, så det känns som att hela uttrycket kanske kan bli negativt och då är inte $\mathbb{x} + \mathbb{y}$ i S. Kan vi hitta något sådant exempel?

Om vi t.ex. tar $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ (i första kvadranten) och $\mathbb{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (i tredje kvadr.) blir $\mathbb{x} + \mathbb{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ som inte ligger i S! Vi har visat att om $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in S$ gäller inte alltid att $\mathbb{x} + \mathbb{y} \in S \Rightarrow$ <u>S är inget underrum till $\mathbb{R}^2$</u>!

3. (behöver inte kollas eftersom vi redan vet att S inte är något underrum)
Tag $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in S$, dvs $x_1 \cdot x_2 \geq 0$, och en godtycklig konstant c.

Finns $c\mathbb{x}$ i S?

$$c\mathbb{x} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}, \quad (cx_1) \cdot (cx_2) = \underbrace{c^2}_{\geq 0} \underbrace{x_1 x_2}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow c\mathbb{x} \in S. \quad \text{ok!}$$