Lösningar till Linjär Algebra, M1 (tmv165), TD1 (tmv185), V1 (tmv841)

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (2p)

Lösning: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & -5 & 10 \end{vmatrix} =$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 60$$

Svar: 60

(b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ på respektive $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Bestäm matrisen för F samt bilden av vektorn $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$. (2p)

Svar: Matrisen för F är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Bilden av $2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$ är $7\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

(c) Låt A vara matrisen (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Bestäm baser till både kolonnrumet, Col(A), och nollrumet, Nul(A), för A. Ange A:s rang, Rank(A).

Lösning: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Svar: Rank(A) = 2

Bas för Col(A) är $\{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T, \ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\}$.

Bas för Nul(A) är $\{\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\}$.

(d) Ange alla rella tal h sådana att vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & h \end{bmatrix}^T$ spänner upp $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning: Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3, \ \mathbf{v}_4$ spänner upp $\mathbb{R}^3$ om och endast om Rank $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = 3$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & h+7 \end{bmatrix}$$

Svar: Vektorerna spänner upp $\mathbb{R}^3$ om och endast om $h \neq -7$

(e) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^3$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$. Vektorn $\mathbf{v}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. Ange vektorn $\mathbf{v}$:s koordinater i standardbas. (2p)

Lösning: $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + (-1)\mathbf{u}_2 + 1\mathbf{u}_3$

Svar: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

(f) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -8 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & -1 \\ -3 & -8 & -5 & -7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen (4p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Lösning: Ekvationen $AXB = C$ är, om B har invers, ekvivalent med $AX = CB^{-1}$. Om också A har invers är lösningen $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Eftersom $\det(A) = 2$ och $\det(B) = -1$ är A och B inverterbara.

Med hjälp av radoperationer erhålls lätt inversen $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Vi har också $B^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Därmed är

$$X = -\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ett alternativ till beräkning av A^{-1} är att lösa ekvationen $AX = CB^{-1}$ med gausseliminering. Detta kräver mindre kalkyler och är enda alternativet om A inte är inverterbar. Vi har då att om $\left[\begin{array}{c|c} A & CB^{-1} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I & E \end{array}\right]$ så har ekvationen unik lösning $X = E$. Om A saknar invers erhålls parameterlösning på motsvarande sätt.

I detta fall är $CB^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ och

$$\left[\begin{array}{c|c} A & CB^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Bestäm en ortogonal matris P som diagonaliserar matrisen (8p)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ange också en diagonal matrisen D som uppfyller $P^{-1}MP = D$ samt beräkna M^n för godtyckliga $n \geq 1$.

Lösning: $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$ där $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ är en ON-bas av egenvektorer till M, $M\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Vidare är $P^{-1} = P^T$ och $P^TMP = D = \text{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$.

Dessutom är $PDP^T = M$ och $M^n = PD^nP^T = \lambda_1^n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}^T + \lambda_2^n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}^T + \lambda_3^n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}^T$.

Egenvärden beräknas genom att ekvationen $\det(M - \lambda I) = 0$ löses.

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (R_1 \mapsto R_1 - R_2, R_3 \mapsto R_3 - R_2)$$
$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & (6-\lambda) & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -0 & -(6-\lambda) & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (6-\lambda)^2 \left(\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (6-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Det ger $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_{2,3} = 6$.

Egenvektorer beräknas genom att ekvationerna $M\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ löses.

Det ger $\mathbf{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ samt $\mathbf{v}_{2,3} = r \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + s \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Om vi här väljer $\mathbf{v}_2 = r \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ så krävs för ortogonalitet att $\mathbf{v}_3 = s \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T - 2s \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = s \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Normering ger $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $s = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Således är
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Slutligen är $M^n = 3^n \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} + 6^n \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} +$
$6^n \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} =$

$$3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 6^{n-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 6^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 6^{n-1} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3^n + 2 \cdot 6^n & 3^n - 6^n & 3^n - 6^n \\ 3^n - 6^n & 3^n + 2 \cdot 6^n & 3^n - 6^n \\ 3^n - 6^n & 3^n - 6^n & 3^n + 2 \cdot 6^n \end{bmatrix}$$

4. Låt U vara det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av följande linjärt oberoende vektorer: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en ortogonal bas i U. (3p)

(b) Bestäm det ortogonala komplementet $U^\perp$. (3p)

Lösning: Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & -7 \end{bmatrix}^T$. Vi använder Gram-Schmidts metod för att ortogonaliserar $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_1' := \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_2' := \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1'}{||\mathbf{v}_1'||^2}\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{-10}{10}\right)\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||^2}\mathbf{v}_2' - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1'}{||\mathbf{v}_1'||^2}\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{-26}{26}\right)\mathbf{v}_2' - \left(\frac{30}{10}\right)\mathbf{v}_1'$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ och $\mathbf{v}_3'$ utgör en ortogonal bas för U.

(b) Vi söker nu underrummet

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0, \text{ för alla } \mathbf{v} \in U\}$$

Eftersom $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, $\mathbf{v}_3'$ är en bas för U blir

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{x} = 0, i = 1,2,3\} = \{\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

där

$$A = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}_1')^T \\ (\mathbf{v}_2')^T \\ (\mathbf{v}_3')^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Radoperationerna $R_2 \mapsto R_2 - 2R_1$, $R_3 \mapsto R_3 - 2R_1$ och $R_3 \mapsto \frac{1}{5}R_3 - R_2$ tar A till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Variabeln x_4 är alltså fri och efter återsubstitution ser vi att nollrummet och därmed underrummet $U^\perp$ ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_4/3 \\ 2x_4/3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T,\ t \in \mathbb{R}\}$

5. Bestäm det plan $z = ax + by + c$ som är bäst anpassat, i minstakvadratmetodens mening, till punkterna $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,1,3)$, $(2,2,4)$, $(3,3,5)$. (6p)

Lösning: Varje punkt (x_i, y_i, z_i) ger en ekvation $z_i = ax_i + by_i + c_i$. Dessa ger tillsammans ett ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Minstakvadratmetodens lösning $AX = B$ är lösningen till $A^T X = A^T B$ som i detta fall är

$$\begin{bmatrix} 19 & 18 & 9 \\ 18 & 19 & 9 \\ 9 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Eliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 19 & 18 & 9 & 33 \\ 18 & 19 & 9 & 32 \\ 9 & 9 & 5 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 9 & 5 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 7 \end{array}\right]$$

Bästa planet enligt minstakvadratmetoden har alltså ekvationen $z = \frac{30}{23}x + \frac{7}{23}y + \frac{7}{23}z$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om A är en 3×3-matris så är $\det(3A) = 3\det(A)$

Svar: Falskt

(b) Varje linjärt ekvationssystem $AX = B$ med fler obekanta än ekvationer, har oändligt många lösningar.

Svar: Falskt

(c) Om tre vektorer spänner upp $\mathbb{R}^3$ så kan de inte vara linjärt beroende.

Svar: Sant

(d) Om A är en $n \times n$-matris och $\text{Row}(A) = \mathbb{R}^n$ så är A^T inverterbar.

Svar: Sant

(e) Linjen $x_1 - 2x_2 = 1$ är ett underrrum i $\mathbb{R}^2$.

Svar: Falskt

(f) $(\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$.

Svar: Sant

7. (a) Definiera begreppen egenvektor och egenvärde till en kvadratisk matris. (2p)

(b) Bevisa att om $A^k = 0$ för något k så har A endast noll som sitt egenvärde. (2p)

(c) Låt λ vara ett egenvärde till en inverterbar matris A. Visa att $\lambda \neq 0$ och att λ^{-1} är ett egenvärde till matrisen A^{-1}. (2p)