

IDAG: Dimension och rang

Mål: Bestämma dimensionen, "storleken", av ett vektorrum

- Bestämma baser för $\text{Nul}(A)$, $\text{Col}(A)$ och $\text{Row}(A)$

Vi såg i F7 att om V har en bas $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ så är V isomorft med ("har samma struktur som") $\mathbb{R}^n$

Därför verkar det troligt att alla baser för V har n element, annars skulle $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$ ha samma struktur.

Vi visar detta genom att applicera följande sats två gånger:

Sats 4.5.9 Låt $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas för vektorrummet V . Då är varje delmängd av V med fler än n element linjärt beroende.

[Jämför Sats 1.7.8!]

(Dvs: alla baser har max. n element.) Detta ger

Sats 4.5.10 Om V har en bas med n element så har alla baser för V precis n element.

Beris (4.5.10): Antag att B och C är baser för V .

Eftersom C är lin. ober. säger Sats 4.5.9 att $\#(C) \leq \#(B)$. ($\#(A)$ = antal element i A)

Men C är en bas och B är lin. ober. så vi kan åberopa Sats 4.5.9 igen med ombytta roller på B och C . Detta ger $\#(B) \leq \#(C)$.

Alltså är $\#(C) = \#(B)$. $\square$

Bevis (4.5.9) Låt $U = \{u_1, \dots, u_p\}$ vara en delmängd av V med $p > n$ element.

Vi har visat satsen för $\mathbb{R}^n$ (Sats 1.7.8). Alltså är koordinatvektorerna $[u_1]_B, \dots, [u_p]_B \in \mathbb{R}^n$ lin. ber.

$\Rightarrow \exists \{c_k\}_{k=1}^p \neq 0$ så att

$$0 = c_1 [u_1]_B + \dots + c_p [u_p]_B = [c_1 u_1 + \dots + c_p u_p]_B.$$

Men detta betyder ju att $c_1 u_1 + \dots + c_p u_p = 0$! $\square$

Vi såg också i F7 att vi kan kapa bort överflödiga vektorer från $\{v_1, \dots, v_p\}$ och få en bas för $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ (Sats 4.3.5).

Alltså är följande definition vettig:

Def. Om V spänns upp av en ändlig mängd är V ändlig dimensionellt, annars oändlig dimensionellt.

I det ändliga fallet ges dimensionen av V av $\dim V = \#(B)$, där B är en bas för V .

Om $V = \{0\}$ är $\dim V = 0$.

Ex. $\dim \mathbb{R}^n = n$ då $\{e_1, \dots, e_n\}$ är en (ändlig) bas

Ex. $\ell^2 = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$ är ∞ -dimensionellt,

ty alla vektorerna $e_j = (0, 0, \dots, \underbrace{0, 1, 0, \dots}_{\text{plats } j})$

krävs för att spänna upp ℓ^2 .

$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ är en Schauder-bas för ℓ^2

Ex. Ett plan P i $\mathbb{R}^3$ spänns upp av två vektorer så $\dim P = 2$.

En linje L kräver bara en vektor, så $\dim L = 1$.

Sats 4.5.11 Varje mängd av lin. ober. vektorer i ett underrum U av V med $\dim V < \infty$ kan utökas till en bas för U . Det gäller att $\dim U \leq \dim V$.

Bevisidé: Lägg till lin. ober. vektorer tills $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\} = U$. Proceduren tar alltid slut eftersom om $p = \dim V$ så spänner vi upp V och således även U .

Bassatsen (4.5.12)

Låt V vara ett vektorrum av dimension p och låt B vara en mängd med $\#(B) = p$. Då är B en bas för V om

- Ⓘ B är lin. ober. eller
- Ⓜ B spänner upp V .

Bevis: Antag Ⓘ: Utöka till en bas med $\dim V = p$ element enligt Sats 4.5.11 - dvs. utöka med inga element.
Antag Ⓜ: Reducera till en bas med $\dim V = p$ element enligt Sats 4.3.5 - dvs. ta inte bort några element. $\square$

Speciella underrum (igen)

Låt $A = [a_1 \dots a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och låt oss bestämma en bas för $\text{Col}(A) = \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$,
dvs. reducera $\{a_1, \dots, a_n\}$ till en lin. ober. mängd som spänner upp $\text{Col}(A)$.

Kom ihåg: Om $A \sim B$ så har $Ax = b$ och $Bx = b$ samma lösningar.

Specifikt: Om $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$ så är $x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = 0$
med samma vikter $x_k, k=1, \dots, n$. $\rightarrow$

$\Rightarrow$ Det räcker att undersöka radkanoniska matriser.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B}$

$\Rightarrow b_3 = -2b_1 + 3b_2$ och $\{b_1, b_2\}$ lin. ober.

$\Rightarrow a_3 = -2a_1 + 3a_2$ och $\{a_1, a_2\}$ lin. ober.

$\Rightarrow \{a_1, a_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för $\text{Col}(A)$.
(av dimension 2)

Generellt:

A 's pivotkolonner är en bas för $\text{Col}(A)$

Vad gäller för $\text{Nul}(A)$?

Ex. Med samma A, B får vi att

$$Ax=0 \Leftrightarrow Bx=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ så}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för $\text{Nul}(A)$ av dimension 1.

En bas för $\text{Nul}(A)$ erhålls genom att skriva lösningarna till $Ax=0$ på parametrisk form

Radrummet

Vi kan även betrakta radrummet

$\text{Row}(A) = \{ \text{alla lin. komb. av } A\text{'s rader} \}$

Radreducering av A till B leder till att varje rad i B är en lin.komb. av A 's rader.

$\Rightarrow$ om $A \sim B$ så är $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$

Ex. igen: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Här är $(1, 0, -2)$ och $(0, 1, 3)$ lin.ober., så en bas för $\text{Row}(A)$ ges av $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. $\begin{pmatrix} (0,0,0) \\ \text{tillför} \\ \text{ingenting} \end{pmatrix}$

Generellt:

Om $A \sim B$ så är B 's icke-noll rader en bas för $\text{Row}(A)$.

Rang

Observera att $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$ då det finns lika många icke-noll rader som pivotkolonner.

Def. Vi kallar $\dim \text{Col}(A)$ ringen av A och skriver detta tal som $\text{rank}(A)$.

Eftersom $\dim \text{Nul}(A) = \#\{\text{fria variabler}\}$
 $= \#\{\text{kolonner i } A\} - \#\{\text{pivotkolonner i } A\}$

får vi

Rangsatsen Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gäller det att
 $\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$ och
 $\text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A) = n$.

Ex. En 2×100 -matris A har $\text{rank } A \leq 2$
 då $\dim \text{Row}(A) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Alltså måste 98 av kolonnerna vara
 lin. komb. av de övriga!

Ex. En 6×9 -matris A kan inte ha ett
 2-dimensionellt nollrum, ty då vore dess
 rang 7. Men $\text{rank } A = \dim \text{Row}(A) = \dim \mathbb{R}^6 \leq 6$.

Läs utökningen av Satsen om inverterbara
 matriser! Lay, s. 253.

Illustration $\rightarrow$

"Sats 2.3.8"

