MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 110316 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Emil Gustafsson, 0703-088304

TMV166/186 Linjär algebra M och TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor och Matlab 2011 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar samt tid och plats för visning kommer att läggas ut på kurshemsidan. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & 1 & a \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2a \end{bmatrix}^T$.

(a) För vilka värden på a ligger nollvektorn i Span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? (2p)

(b) För vilka värden på a ligger $\mathbf{w}$ i linjära höljet Span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$? (2p)

(c) För vilka värden på a är vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ linjärt beroende? (2p)

3. (a) Definiera vad som menas med ett *underrum* i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ spänner upp ett underrum H i $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ortogonal bas för H. (2p)

(c) Bestäm ortogonala projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ på H. (2p)

4. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Beräkna A^{2011}. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på deluppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. För att få poäng måste du motivera ditt svar väl. Om du hävdar att ett påstående är SANT, motivera varför det är sant (du får hänvisa till satser i boken). Om du hävdar att ett påstående är FALSKT, illustrera varför med ett motexempel.

(a) Om A och B är $n \times n$-matriser, så gäller (2p)

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

(b) Om $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och B är en godtycklig 3×3-matris, så har B och AB samma nollrum. (2p)

(c) Om A är en inverterbar 2×2-matris så är A diagonaliserbar. (2p)

6. Låt V vara vektorrummet av alla polynom av formen $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. Låt oss kalla ett polynom *symmetriskt* om $p(1/t) = p(t)/t^4$. Visa att de symmetriska polynomen bildar ett underrum i V. Bestäm en bas för samt dimensionen av detta underrum. (6p)

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av (6p)

$$T(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T(\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

där

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ för T relativt basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Lycka till!
Roger

Anonym kod	TMV166/186 Linjär algebra M och TD 110316	sid.nummer 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna determinanten (3p)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Ett plan H i $\mathbb{R}^3$ har basen $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$. Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. För var och en av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, avgör om vektorn tillhör H, och bestäm i så fall dess koordinater i basen $\mathcal{B}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

VÄND!

(d) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Använd minstakvadratmetoden för att bestämma den räta linje som bäst ansluter till de tre punkterna $(x, y) = (-1, 2),\ (0, 2),\ (1, -1)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar TMV140, Linjär Algebra Z, 110316

1. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen $[A|I_3]$ och förvandlar den till $[I_3|A^{-1}]$ genom att utföra följande sekvens av radoperationer :

$$R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 + R_2,$$
$$R_1 \mapsto R_1 - R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - R_3, \quad R_2 \mapsto -R_2.$$

Man kan bekräfta att detta ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Kalla matrisen för A. Om vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto 2R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto 3R_3 - R_2, \quad R_4 \mapsto 4R_4 - R_1 \tag{1}$$

så förvandlas matrisen till den triangulära formen

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Från (1) ser vi att

$$\frac{\det U}{\det A} = 2 \cdot 3 \cdot 4, \tag{3}$$

medan att (2) medför att

$$\det U = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5. \tag{4}$$

Från (3) och (4) härleder vi att $\det A = 5$.

(c) Vi ställer upp en utökad matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & | & 1 & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 & 1 \\ 2 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_1 \leftrightarrow R_2, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 1 \\ 0 & 2 & | & 1 & 1 \\ 0 & 0 & | & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Från den sista raden ser vi nu att $\mathbf{u}$ ligger inte i H medan att $\mathbf{v}$ gör det. Bakåtsubstitution ger då i sin tur att $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [1/2\ 1/2]^T$.

(d) Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_2,$$

så förvandlas matrisen till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivoterna ligger i de två första kolonnerna och motsvarande kolonner i A spänner upp dess kolonnrum. Alltså

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T\}.$$

För att hitta en bas till nollrummet måste vi fortsätta och lösa ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$. Variablerna x_3 och x_4 är fria och bakåtsubstitution leder till

$$x_1 = -2x_3 - x_4, \quad x_2 = -x_3 + x_4.$$

En godtycklig vektor i nollrummet ges därmed av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som i sin tur medför att

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

(e) Vi söker minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen ges av $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$. Vi beräknar först

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow (A^TA)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Därnäst har vi

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Slutligen,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix},$$

som innebär att den räta linje som passar bäst har ekvationen $y = -\frac{3}{2}x + 1$.

2. (a) Nollvektorn ligger i vilket vektorrum som helst så det spelar ingen roll vad a är.

Svar : För alla $a \in \mathbb{R}$.

(b) Vi ställer upp den utökade matrisen

$$[\mathbf{u}\ \mathbf{v} \mid \mathbf{w}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2a \end{array}\right].$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1,$$

så erhålls trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{array}\right]. \tag{5}$$

Från detta ser vi att $\mathbf{w} \in$Span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ om och endast om $2a - 1 = 0$, dvs $a = 1/2$.

(c) Från (b) vet vi redan att vektorerna är linjärt beroende då $a = 1/2$. Men i trappstegsformen (5) har vi också en nollrad då $a = 1$. Så det är dessa två värden på a som gör att de tre vektorerna blir linjärt beroende.

3. (a) En delmängd U till ett vektorrum V säga vara ett *underrum* om den är icke-tom och sluten under addition och skalärmultiplikation. Dvs, för alla $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ och alla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ så är också $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \in U$.

(b) Kalla de två givna vektorerna för $\mathbf{v}_1$ resp. $\mathbf{v}_2$. Vi ortogonaliserar basen genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{3}{4}\right)\mathbf{v}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

För enkelhets skull, låt oss i stället välja $\mathbf{v}_3 = [1\ 1\ 1\ \ -3]^T$.

(c) Sätt $\mathbf{u} = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$. Med den nyss framtagna ortogonalbasen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ för H kan vi använda projektionsformeln

$$\begin{aligned} \text{proj}_H\mathbf{u} &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}\right)\mathbf{v}_3 \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{12}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

4. (a) Vi beräknar först

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-5-\lambda) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

som innebär att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -2$.

$\lambda_1 = 1$: Vi har $A - I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = -2$: Vi har $A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Därmed har vi diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$, där

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Från diagonaliseringen ovan härleder vi att

$$A^{2011} = PD^{2011}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2^{2011} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2^{2011} & 2+2^{2012} \\ -1-2^{2011} & -1-2^{2012} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Detta är FALSKT. T.ex. om $A = I_2$, $B = -I_2$, så är $\det(A) = \det(B) = 1$, medan att $\det(A+B) = \det(O_2) = 0$.

(b) Detta är SANT. Oberoende av vilken matris man väljer för A så gäller alltid att $\mathrm{Nul}(B) \subseteq \mathrm{Nul}(AB)$, ty $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow AB\mathbf{x} = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Poängen nu är att matrisen A i denna uppgift är inverterbar. Detta medför att också $\mathrm{Nul}(AB) \subseteq \mathrm{Nul}(B)$, för om $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så gäller att

$$B\mathbf{x} = (I_3B)\mathbf{x} = (A^{-1}A)B\mathbf{x} = A^{-1}(AB\mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(c) Detta är FALSKT. Ett motexempel är $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denna matris är inverterbar (dess determinant är $+1$), men enda egenvärdet är $\lambda = 1$ och motsvarande egenrum är bara 1-dimensionellt (det spänns upp av $[1\ 0]^T$).

6. Å ena sidan är

$$p(1/t) = \frac{a}{t^4} + \frac{b}{t^3} + \frac{c}{t^2} + \frac{d}{t} + e.$$

Å andra sidan är

$$\frac{p(t)}{t^4} = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{d}{t^3} + \frac{e}{t^4}.$$

Dessa två funktioner är lika om och endast om $a = e$ och $b = d$. Om vi identifiierar $\mathbb{P}_4$ med $\mathbb{R}^5$ genom att identfiera polynomet $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ med vektorn $[a\ b\ c\ d\ e]^T$ så kan vi skriva att

$$\begin{aligned} V &\cong \{[a\ b\ c\ d\ e]^T \in \mathbb{R}^5 : a = e \text{ och } b = d\} \\ &= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Detta är ett 3-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^5$ som spänns upp av de tre vektorerna ovan. Om vi går tillbaka till $\mathbb{P}_4$ så innebär detta att V är ett 3-dimensionellt underrum i $\mathbb{P}_4$ och att $\{t^4 + 1, t^3 + t, t^2\}$ är en bas för V.

7. Det är givet att $T(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$, för $i = 1, 2, 3$. Per definition av matrisen för en linjär avbildning relativt en bas så är

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{B}}] = [[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{e}_3]_{\mathcal{B}}] \\ &= \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Så det återstår att invertera matrisen. Detta görs på vanligt vis (se uppgift 1(a)), och det visar sig att

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$