MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 150318 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Frida Svelander

0703-088304

TMV166 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från kryssuppgifter 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Bestäm lösningen till följande begynnelsevärdesproblem (4p)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Skissa fasporträttet till dynamiska systemet. (1p)

(c) Är origo en stabil nod, en instabil nod eller en sadelpunkt? (1p)

Lösning: (a) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, då $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ och

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena till A är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 4$ med egenvektorer $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$. Därmed ges den allmänna lösningen till dynamiska systemet av

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Alltså

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som innebär $c_1 = 3$ och $c_2 = 1$. Därmed ges lösningen till begynnelsevärdesproblemet av

$$x_1(t) = 3e^t + e^{4t}, \quad x_2(t) = 3e^t - 2e^{4t}$$

(b) Se bilden på sista blad

(c) Instabil nod, eftersom egenvärdena är både positiva

3. (a) Definiera vad som menas med *nollrummet* till en $m \times n$ matris A. (1p)

(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

Bestäm en ortogonal bas till $\mathrm{Nul}(A)$. (4p)

(c) Bestäm $\mathrm{rank}(A)$. (1p)

Lösning:

(a) Nollrummet till A är mängden av alla vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nollrummet utgörs av alla vektorer av formen

$$\begin{bmatrix} -s \\ (-s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med s och t godtyckliga reella tal, vilket ger basvektorerna

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

som inte är ortogonala. Skapa ortogonal bas med Gram-Schmidt.

$$v_1 = b_1, \quad v_2 = b_2 - \frac{b_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -1/9 & 4/9 & 1/9 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(c) $Rank(A) = 4 - dim(Nul(A)) = 4 - 2 = 2$

4. (a) Bestäm linjära transformationen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ som deformerar triangeln med hörn $(0,0), (0,1), (1/2,1)$ till triangeln med hörn $(0,0), (0,2), (3,4)$. (3p)

(b) Dekomponera matrisen A som $A = BCD$, då D är en skjuvning och B, C är expansioner. (3p)

Lösning: Vi letar efter en matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så att

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vilket ger $a = 6, b = 0, c = 4, d = 2$. Alltså $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Genom att sätta

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ kn & n \end{bmatrix}$$

får vi $k = 2, m = 6, n = 2$.

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (12p)

(a) Ortogonala vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende

(b) Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är en rotation omkring origo i planet då är matrisen A ortogonal

(c) Om A är en ortogonal 2×2 matris så är $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en rotation omkring origo i planet

(d) Låt A, B vara $n \times n$ matriser. Om λ är ett egenvärde till A och μ ett egenvärde till B då är $\mu\lambda$ ett egenvärde till AB

(e) $\lambda = 0$ är alltid ett egenvärde för en nilpotent matris

(f) Determinanten av en diagonaliserbar matris är lika med produkten av egenvärdena till matrisen

Lösning:

(a) SANT. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vara ortogonala. Om en av dessa vektorer är noll är påståendet uppenbart, alltså kan vi anta att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är noll-vektorer. Låt $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ vara en linjär kombination av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Då har vi $\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{w}\| = 0$. Men $\|\mathbf{w}\|^2 = (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha^2\|\mathbf{u}\|^2 + \beta^2\|\mathbf{v}\|^2 = 0$ om och endast om $\alpha = \beta = 0$.

(b) SANT. $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ och $AA^T = I_2$.

(c) FALSKT. Motexempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A är ortogonal men inte en rotation, utan en spegling i x-axeln.

(d) FALSKT. Motexempel:

$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ dvs egenvärdena 1 och -1.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dvs bara egenvärdet 1. Alltså tex: 1 egenvärde till A, -1 egenvärde till B, men 1*(-1)=-1 inte egenvärde till AB.

(e) SANT. Eftersom $\det A = 0$ gäller för nilpotent matriser, då har $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ icke-triviala lösningar.

(f) SANT.

$$\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \det(D) = \Pi_i \lambda_i,$$

eftersom D är en diagonal matris med diagonala elementen lika med egenvärdena till A.

6. Spåret (*Trace* på engelska) av en $n \times n$ matris A med element a_{ij} defineras av

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

d.v.s, $\mathrm{Tr}(A)$ är summan av diagonala elementen i matrisen A.

(a) Visa att $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, for alla $n \times n$ matriser A, B (3p)

(b) Använd (a) för att visa att $\mathrm{Tr}(A)$ är lika med summan av egenvärdena till A när A är diagonaliserbar. (3p)

Lösning:

(a) Beteckna elementet på rad i kolumn j i matrisen M med m_{ij}. Beteckna rad i ur en matris M med M_i^{rad} och kolumn i ur en matris M med M_i^{col}.

$$Tr(AB) = \sum_i (A_i^{rad}) \cdot (B_i^{col}) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \sum_j (B_j^{rad}) \cdot (A_j^{col}) = Tr(BA)$$

(b)

$$Tr(A) = Tr(PDP^{-1}) = Tr(PP^{-1}D) = Tr(D) = \sum \lambda_i$$

Anonym kod	TMV166 Linjär algebra 150318	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka värden av $h \in \mathbb{R}$ är vektorerna linjärt oberoende? (2p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} h & -2 & -3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & h & 6 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Lösning:
Lat $V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$. Vi har

$$\det(V) = \det \begin{bmatrix} h & 0 & -2 \\ -2 & h & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = h(h+6) - 2(-12+3h) = h^2 + 24.$$

Eftersom $\det(V) \neq 0$ för alla $h \in \mathbb{R}$ då är vektorerna alltid linjärt oberoende.

Svar: För alla $h \in \mathbb{R}$.

(b) Visa att matrisen A är ortogonal (2p)

$$A = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Vi har

$$AA^T = \frac{1}{11}\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: ....

(c) Beräkna om mojligt inversen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Eftersom matrisen A är en blockdiagonal matris då har vi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{bmatrix},$$

då använde vi att $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Lös systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ och A är matrisen i uppgiften (b) (3p)

Lösning: Eftersom A är ortgonal då är $A^{-1} = A^T$, därmed $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ges av

$$\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Svar: ....

(e) Bestäm den rätta linjen som, enligt minstkvadratmetoden, bäst ansluter till punkterna (2p)

$$(-1, -1), \quad (0, 1), \quad (2, 3), \quad (3, 5).$$

Lösning: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T y = \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix}$ Den rätta linjen letar vi efter är $y = mx + k$, då

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T y = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

dvs linjen blir $y = 7x/5 + 3/5$.
Svar: $y = 7x/5 + 3/5$

(f) För vilka värden av $a, b \in \mathbb{R}$ är matrisen A diagonaliserbar? (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

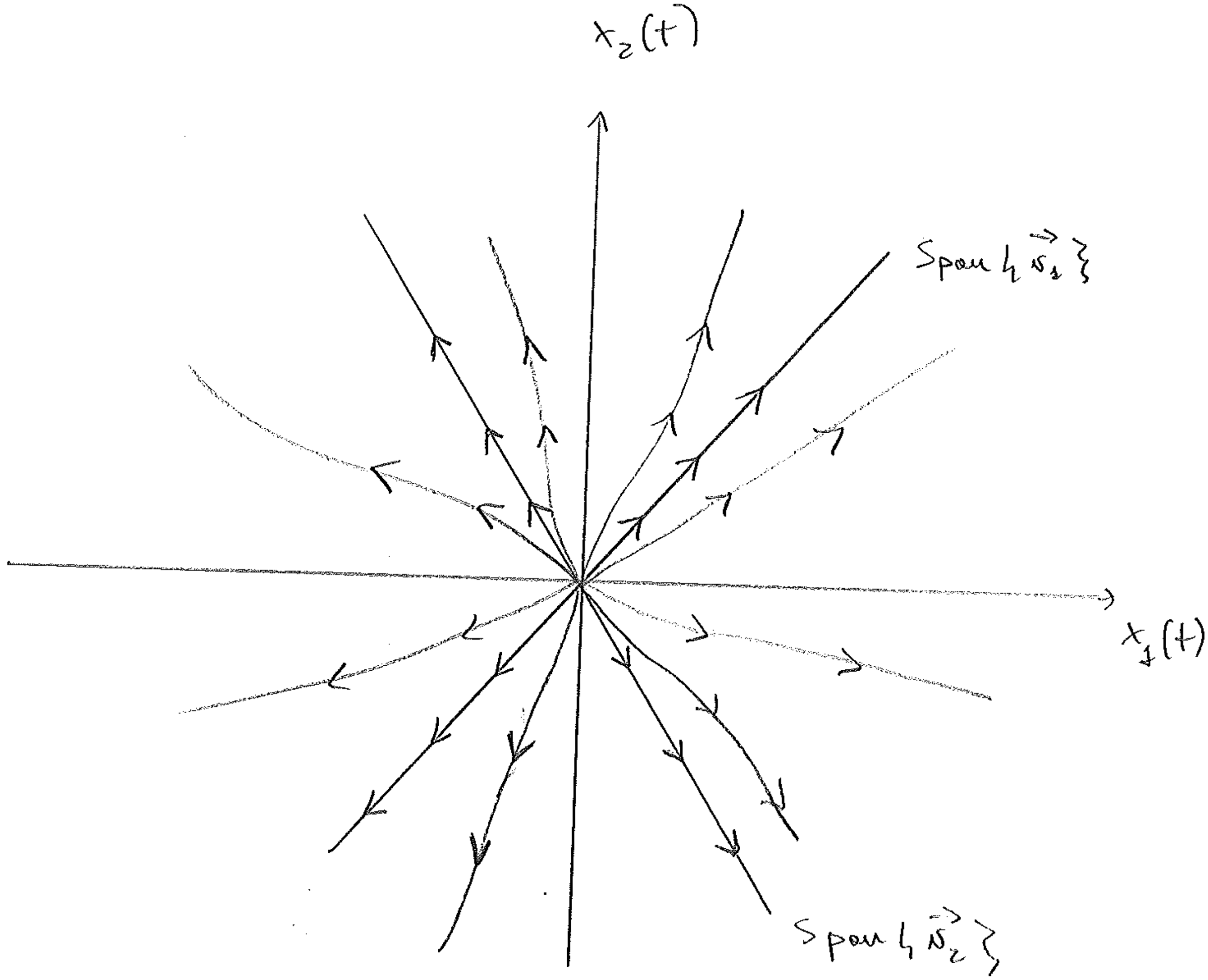
Lösning: Egenvärden kan läsas av som diagonalelement i triangulära matriser, dvs 1 är ett egenvärde med multiplicitet 2 och 2 är ett egenvärde med multiplicitet 2. Båda egenvektorsrummen $E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I_4)$ måste ha dimension 2 för diagonaliserbarhet.

$$A - I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & a - 4b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Därmed $\dim(\mathrm{Nul}(A - I_4)) = 2 \Rightarrow a - 4b = 0$.

$$A - 2I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & a & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Därmed $\dim(\mathrm{Nul}(A - 2I_4)) = 2 \Rightarrow b = 0$. Alltså måste även $a = 0$.
Svar: $a = b = 0$.



FASPORTRÄTTET TILL DYNAMISKA

SYSTEMET I UPPGIFTEN 2