MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 110113 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt:

Lösning till Linjär algebra M/TD

---

1. (a) Notera först att $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Eftersom matrisen B är triangulär så är dess determinant lika med produkten av talen längs diagonalen, dvs $\det(B) = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. För matrisen A utför vi radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_2,$$

och förvandlar den därmed, utan att ändra determinanten, till triangulärformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att $\det(A) = 1\cdot(-1)\cdot(-7) = 7$. Slutligen har vi $\det(AB) = 7\cdot 24 = 168$.

(b) Vi ställer upp den utökade matrisen $[A|I_3]$ och förvandlar den till $[I|A^{-1}]$ genom att utföra följande sekvens av radoperationer :

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_2,$$
$$R_1 \mapsto R_1 + 2R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 - R_3, \quad R_2 \mapsto -R_2.$$

Detta ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Då man utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \quad R_4 \mapsto R_4 - 4R_1,$$
$$R_2 \mapsto \frac{1}{2}R_2, \quad R_3 \mapsto R_3 + R_2, \quad R_4 \mapsto R_4 + R_2,$$

så förvandlas matrisen till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivoterna ligger i de två första kolonnerna och motsvarande kolonner i A är en bas för dess kolonnrum. Alltså

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

För att hitta en bas till nollrummet måste vi fortsätta och lösa ekvationen $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$. Variablerna x_3 och x_4 är fria och bakåtsubstitution leder till

$$x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \quad x_2 = -x_3 + \frac{2}{3}x_4.$$

En godtycklig vektor i nollrummet ges därmed av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som i sin tur medför att

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}.$$

(d) Vi ortogonaliserar först basen genom att byta ut $\mathbf{v}_2$ mot

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{18}{9}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi normaliserar och producerar ON-basen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ där

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{||\mathbf{v}_2'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Minstakvadratlösningen ges av $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$. Vi beräknar först

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}.$$

Vidare har vi

$$A^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Slutligen,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 24 \\ -36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Vi beräknar först

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -10 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 50 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3),$$

som innebär att egenvärdena är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 3$.

$\lambda_1 = -2$: Vi har $A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = 3$: Vi har $A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Därmed har vi diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Lösningen ges av

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Pe^{tD}P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{3t} \\ 4e^{-2t} - 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

3. (a) Associativitet betyder att $(AB)C = A(BC)$ under förutsättning att alla produkterna är definierade.

(b) Det finns oändligt många exempel, här är ett : tag $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då gäller att $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ medan att $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Först kan vi transponera båda leden och erhåller

$$AX + B = (X^T C)^T = C^T X = CX, \quad \text{ty } C^T = C.$$

Detta medför att $B = CX - AX = (C - A)X$ så, under förutsättningen att $C - A$ är inverterbar, har vi följande uttryck för lösningen :

$$X = (C - A)^{-1}B.$$

Nu räknar vi. Först

$$C - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (C - A)^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi ställer upp vektorerna i en matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & a \end{bmatrix}.$$

Radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto 5R_3 + R_2$$

förvandlar denna till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5a-7 \end{bmatrix}.$$

De ursprungliga tre vektorerna är därmed linjärt beroende om och endast om $5a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7/5$.

(b) Vi har $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ där

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi löser systmemt genom att arbeta på den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Samma tre radoperationer som ovan förvandlar denna till trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right].$$

Via bakåtsubstitution härleder vi att $c = 5$, $b = -3$, $a = 4$.

Därmed är $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T$.

5. (a) i. $K(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$ och $R(T) = \{w \in W : \exists\, v \in V \text{ s.a. } T(v) = w\}$.

ii. T sägs vara *linjär* om, för alla $v_1, v_2 \in V$ och alla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gäller

$$T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2).$$

(b) Vi kan räkna m.a.p. standardbasen $\{1, t, t^2\}$ för $\mathbb{P}_2$. Man kan kontrollera att

$$T(1) = 2, \quad T(t) = -1, \quad T(t^2) = 2.$$

Därmed ser man direkt att

$$R(T) = \text{Span}\{1\}, \quad K(T) = \text{Span}\{1 + 2t, 1 - t^2\}.$$

Rummet $K(T)^\perp$ spänns upp av ett polynom $a + bt + ct^2$ som satisfierar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man kontrollerar lätt att lösningsrummet spänns upp av $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, som medför att $K(T)^\perp = \text{Span}\{-2 + t - 2t^2\}$.

6. Följer man metoden i MATLAB 4 så får man

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vektorn $\mathbf{v}$ ligger längs rotationsaxeln så gäller att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

7. (a) En $n \times n$ matris A sägs vara en ortogonalmatris om $A^T A = I_n$.

(b)

$$||A\mathbf{x}||^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2.$$

(c) Låt λ vara ett egenvärde till en $n \times n$ ortogonalmatris A. Då finns det en nollskild vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Men från (b) har vi då att

$$||\mathbf{x}|| = ||A\mathbf{x}|| = ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda|||\mathbf{x}||,$$

och eftersom $||\mathbf{x}|| \neq 0$ så måste $|\lambda| = 1$.