# TMV166 Linjär Algebra för M

## Tentamen

---

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

*Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges.* Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

*Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges.* Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

*Lycka till!*

Tony

**MATEMATISKA VETENSKAPER** — **TMV166 2016**
**Chalmers tekniska högskola** — **2016–04–07 kl. 08:30–12:30 (SB Multisal)**
**Examinator: Tony Stillfjord** — **Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa**
**Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. 0706-441088**

# TMV166 Linjär Algebra för M

# Tentamensuppgifter

---

**1.** Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -4 \\ 6x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 3 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

*Lösning:*

Radreducera totalmatrisen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & -7 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 6 & -5 & 13 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -4 & 0 \\ 0 & -14 & -8 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & -7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right]$$

Alltså finns inga lösningar.

**2.** Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ och bestäm alla matriser $A$ som kommuterar med $B$, dvs. $AB = BA$. (3p)

*Lösning:* Vi ansätter $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och räknar ut $AB$ och $BA$:

$$AB = \begin{bmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{bmatrix}.$$

Från detta ser vi direkt att $c = 0$ eftersom $c = 3c$. Ersätter vi $c$ med 0 så får vi de tre ekvationerna $a = a$, $d = d$ och $2a + 3b = b + 2d$. Alltså har vi två fria parametrar, t.ex. $a$ och $b$, och den sista ekvationen ger $d = a + b$. Alla matriser som kommuterar med $B$ ges alltså av

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix}.$$

**3.** Matrisen $U = \begin{bmatrix} a/\sqrt{6} & -2/\sqrt{c} & 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{6} & 4/\sqrt{c} & d/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{6} & b/\sqrt{c} & 2/\sqrt{14} \end{bmatrix}$ är ortogonal. Bestäm talen $a, b, c$ och $d$. (3p)

*Lösning:* Att $U$ är ortogonal betyder att kolonnerna är ortonormala. Kalla kolonnerna $u_1$, $u_2$ och $u_3$. Då har vi att

$$u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0$$

och $u_i \cdot u_i = 1$ för $i = 1, 2, 3$. Eftersom $u \cdot v = 0 \Rightarrow (\alpha u) \cdot (\beta v) = 0$ ger de första ekvationerna att

$$\begin{cases} 2a + 2b + 0d = 4 \\ 3a + 0b + 1d = 4 \\ 4a + 2b + 0d = 6 \end{cases}.$$

Enkel radreduktion eller motsvarande ger att $a = b = d = 1$. Det kvarstår att hitta $c$, men via $u_2 \cdot u_2 = 1$ får vi direkt att $c = 4 + 16 + 1 = 21$. De kvarvarande ekvationerna $u_1 \cdot u_1 = u_3 \cdot u_3 = 1$ kan användas för att kontrollera att ekvationssystemet lösts korrekt.

**4.** Transformera den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$ via ett variabelbyte till en annan kvadratisk form $R(y_1, y_2)$ utan någon korsterm $y_1y_2$. Ange $R(y_1, y_2)$. (3p)

*Lösning:* Skriv först $Q$ på matrisform: $Q(x_1, x_2) = Q(x) = x^T Ax$ där $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Eftersom $A$ är symmetrisk är den ortogonalt diagonaliserbar, $A = PDP^T$, så med $y = P^T x$ får vi direkt att $Q(x) = y^T Dy$. (Detta är satsen om principalaxlar.) Vad som återstår är att räkna ut egenvärdena till $A$. Eftersom den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det\big(A - \lambda I\big) = (-3 - \lambda)(5 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda - 1)^2 - 25,$$

så får vi egenvärdena $\lambda = 1 \pm 5$. Svaret blir $R(y_1, y_2) = -4y_1^2 + 6y_2^2$. (Kvadratkompletterar man istället så kan man få andra giltiga svar, men denna metod ger det "bästa" variabelbytet.)

**5.** Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ och $C = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^2$ och låt $v \in \mathbb{R}^2$. Bestäm $[v]_C$ givet att $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. (3p)

*Lösning:* Låt $P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ och $P_C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ vara basbytesmatriserna för $B$ och $C$. Då gäller att

$$P_C[v]_C = P_B[v]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

och genom att lösa detta ekvationssystem får vi $[v]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Alternativt kan detta skrivas som $[v]_C = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[v]_B$ där $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P_C^{-1}P_B$ t.ex. kan beräknas genom att radreducera $\left[\begin{array}{c|c} P_C & P_B \end{array}\right]$. Detta leder till lite mer arbete än det första alternativet men betalar sig ifall vi behöver göra fler basbyten med samma baser.

**6.** En kvadratisk matris kallas för en permutationsmatris om varje rad och varje kolonn innehåller precis ett element med värdet 1, och alla övriga element är 0. Vilka värden kan determinanten av en sådan matris anta? (3p)

*Lösning:* Determinanten av en matris byter tecken om vi byter plats på två rader. Eftersom vi kan byta plats på raderna i en permutationsmatris tills vi får enhetsmatrisen (som har determinanten 1) kan dess determinant bara anta värdena $\pm 1$. Samma resultat fås genom upprepad kofaktorexpansion och induktion över storleken på matrisen.

**7.** Låt $u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^T$ och $v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$ vara $n \times 1$–matriser. Ange vad man brukar kalla det som beräknas av MATLAB-kommandot >> **u'*v**, samt en matematisk formel för resultatet. (3p)

*Lösning:* Kommandot beräknar skalärprodukten av vektorerna $u$ och $v$. En formel ges av

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j.$$

**8.** Matrisen $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ har egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm dess egenvärden. (3p)

*Lösning:* Kalla matrisen $A$ och egenvektorerna $v_1$, $v_2$ och $v_3$. Om $\lambda$ är ett egenvärde så är $Av_k = \lambda v_k$ för något $v_k$. Genom att beräkna $Av_k$ för $k = 1, 2, 3$ får vi

$$Av_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3v_1, \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1v_2 \quad \text{och} \quad Av_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5v_3,$$

så $A$ har de tre egenvärdena $-3$, 1 och 5.

**9.** Beräkna determinanten av matrisen i föregående uppgift. (3p)

*Lösning:* Determinanten av en matris förändras inte om vi adderar multipler av en rad till en annan rad, så vi får

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 14 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = -3 \cdot 14 - 9 \cdot (-3) = -15.$$

Alternativ lösning: Om föregående uppgift lösts kan vi använda att det karakteristiska polynomet $\det\big(A - \lambda I\big)$ kan skrivas som

$$\det\big(A - \lambda I\big) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda).$$

Alltså gäller att

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -3 \cdot 1 \cdot 5 = -15.$$

**10.** Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Bestäm $\dim \operatorname{Nul} A - \dim \operatorname{Nul} A^T$. (3p)

*Lösning:* Enligt rangsatsen är $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A = \dim \operatorname{Col} A^T$ och $n = \dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A$. Eftersom $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ får vi även att

$$m = \dim \operatorname{Col} A^T + \dim \operatorname{Nul} A^T = \dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A^T$$

och därmed blir

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Nul} A - \dim \operatorname{Nul} A^T &= n - \dim \operatorname{Col} A - \big(m - \dim \operatorname{Col} A\big) \\ &= n - m. \end{aligned}$$

---

**11.** Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den ortogonala projektionen på linjen $x_1 = x_2$ och låt $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beskriva en rotation medurs med vinkeln $\phi$. Då är både $T$ och $S$ linjära avbildningar. Bestäm (5p)

(a) standardmatrisen för $T$ (1p)

(b) standardmatrisen för $S$ (1p)

(c) standardmatrisen för $TS$ (1p)

(d) matrisen för $T$ relativt standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och någon bas för den givna linjen. (2p)

*Lösning:* Standardmatrisen för $T$ ges av $\begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}$ där $e_1$ och $e_2$ är enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^2$. Eftersom linjen delar den första kvadranten i två lika stora delar och ortogonal betyder rätvinklig i 2D så ger t.ex. Pythagoras sats att $T(e_1) = T(e_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Alltså får vi standardmatrisen $A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Standardmatrisen för $S$ blir på samma sätt (med lite trigonometri) $B = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$. Notera tecknen: vi roterar *medurs*. Standardmatrisen för $TS$ ges av

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos\phi - \sin\phi & \cos\phi + \sin\phi \\ \cos\phi - \sin\phi & \cos\phi + \sin\phi \end{bmatrix}.$$

Slutligen tar vi basen $B = \{b\}$ för linjen, där $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då ges matrisen för $T$ relativt standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och $B$ av

$$\begin{bmatrix} [T(e_1)]_B & [T(e_2)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}.$$

**12.** Finns det ett heltal $a$ så att mängden $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ a \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$ (5p)
är ett underrum av $\mathbb{R}^n$? I så fall, ange både $a$ och $n$.

*Lösning:* Låt $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix}$ och $z = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ a \end{bmatrix}$. Eftersom $U$ är en delmängd av $R^3$ (alla vektorer i $U$ har tre komponenter) kan $U$ endast vara ett underrum till $\mathbb{R}^3$. Vi kontrollerar de tre kraven; att $0 \in U$, $u + v \in U$ och $cu \in U$ om $u, v \in U$ och $c \in \mathbb{R}$. Att $0 \in U$ är ekvivalent med att $-x \in \operatorname{Span}\{y, z\}$, dvs. $x$, $y$ och $z$ är linjärt beroende. För att undersöka detta radreducerar vi matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} y & z & x \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \\ -6 & a & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & a-6 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2a-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2a-4 \end{array}\right].$$

Alltså är vektorerna linjärt beroende om $a = 2$ och i så fall är $x = -y - 2z$. Men om detta håller så är även de andra två kraven uppfyllda. Om t.ex. $u, v \in U$ så finns det tal $u_1, u_2$ och $v_1, v_2$ så att $u = x + u_1 y + u_2 z$ och $v = x + v_1 y + v_2 z$. Men då är $u = (u_1 - 1)y + (u_2 - 2)z$ så

$$u + v = x + (u_1 + v_1 - 1)y + (u_2 + v_2 - 2)z \in U.$$

Alternativt kan man säga att om $a = 2$ så har vi $U = \operatorname{Span}\{y, z\}$, och det linjära höljet av en mängd vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

**13.** *Spåret* (eng. trace) av en matris $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieras som (5p)

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

dvs. summan av diagonalelementen. Man kan visa att om $B$ och $C$ är två godtyckliga $n \times n$-matriser så gäller $\operatorname{tr} BC = \operatorname{tr} CB$. Använd detta för att visa att om $A$ är diagonaliserbar så är $\operatorname{tr} A$ summan av egenvärdena till $A$, räknat med multiplicitet. (Detta gäller faktiskt även då $A$ inte är diagonaliserbar.)

*Lösning:* Om $A$ är diagonaliserbar så finns en inverterbar matris $P$ och en diagonal matris $D$ så att $A = PDP^{-1}$. Alltså får vi

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} PDP^{-1} = \operatorname{tr} P^{-1}PD = \operatorname{tr} D.$$

Eftersom diagonalelementen i $D$ är egenvärdena till $A$, upprepade lika många gånger som deras (algebraiska) multiplicitet, så har vi nu visat påståendet.

**14.** Låt $u_1, \ldots, u_p$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Definiera vad som menas med att $u_1, \ldots, u_p$ är (5p)

(a) ortogonala, (1p)

(b) ortonormala. (1p)

Bestäm en ortonormal bas för det plan i $R^3$ som ges av ekvationen $x + y + z = 0$. (3p)

*Lösning:* a) Vektorerna är ortogonala om $u_i \neq 0$ och $u_i \cdot u_j = 0$ för alla $i \neq j$.
b) Vektorerna är ortonormala om de är ortogonala och det dessutom gäller att $\|u_i\|^2 = u_i \cdot u_i = 1$ för alla $i$.
Låt $W$ beteckna planet som anges i uppgiften. Då ges en bas för $W$ av vektorerna $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. För att få en ortogonal bas $\{u_1, u_2\}$ tillämpar vi Gram-Schmidts metod. Detta ger $v_1 = x_1$ och

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En ortonormal bas för $W$ ges alltså av

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER — TMV166 2016
Chalmers tekniska högskola — 2016–04–07 kl. 08:30–12:30 (SB Multisal)
Examinator: Tony Stillfjord — Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. 0706-441088

# TMV166 Linjär Algebra för M

## Svar till tentamensuppgifter 1–10

---

Tentamenskod: ..........................................................................................................

| Uppgift | Svar | Poäng |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |