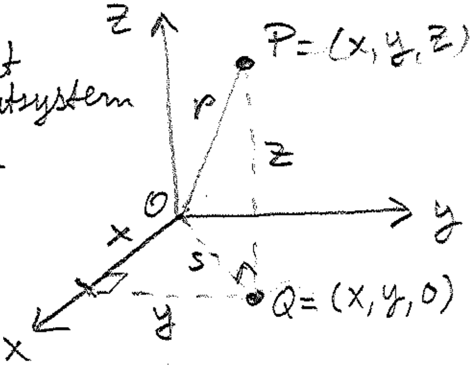
Idag: 10.1 Geometri i rummet.
10.2 Vektorer. (Adams/Essex)

Rummet $\mathbb{R}^3$

Cartesiskt koordinatsystem

$s^2 = x^2 + y^2$

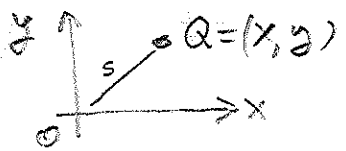
$r^2 = s^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$



Avstånd mellan $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

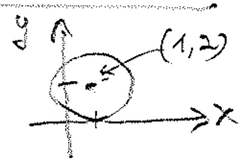
$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Planet $\mathbb{R}^2$

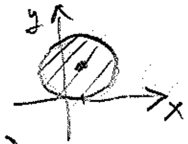


Tolkning av ekvationer och olikheter

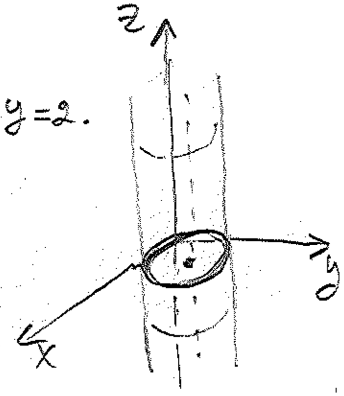
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ i $\mathbb{R}^2$
  cirkel, radie 2, centrum $(1,2)$



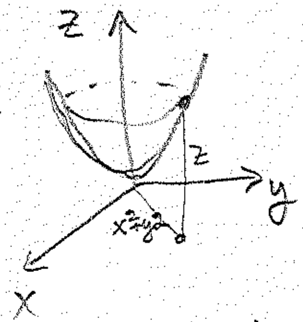
- $x^2 - 2x + y^2 - 4y \le -1$
  $(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 \le -1$
  $(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 4$ cirkelskiva (disk)



- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ i $\mathbb{R}^3$
  cylinder, radie 2, axel $x=1, y=2$.



- $z = x^2 + y^2$
  paraboloid



- $z = 0$ är xy-planet
- $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ är första oktanten.

n-rummet $\mathbb{R}^n$ $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Omgivning till P: $B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |PQ| < r\}$

$n=1$: $B_r(P) = (p-r, p+r)$ öppet intervall

$n=2$: $B_r(P)$ öppen disk

$n=3$: $B_r(P)$ öppet klot

Delmängd $S \subset \mathbb{R}^n$.

A inre punkt till S: någon omgivn helt i S

B randpunkt till S: varje omg. skär både S och S^c

C yttre punkt till S: någon omgivning helt utanför S (helt i S^c).

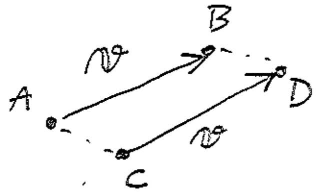
S kan vara öppen, sluten eller ingetdera.

S öppen om innehåller inga av sina randpunkter.
(endast inre punkter i S)

S sluten om innehåller alla sina randpunkter.

OBS: S öppen $\Longleftrightarrow$ S^c sluten
Hela $\mathbb{R}^n$ är både öppen och sluten
Tomma mängden $\emptyset$ både öppen och sluten
Bevisa detta!
$[a,b]$ sluten, (a,b) öppen, $[a,b)$ varken

Geometriska vektorer bestäms av magnitud och riktning.



$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ riktad sträcka

Inget läge! Parallellförflyttning.

Nollvektorn $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$. Motsatt vektor $-\mathbf{v} = \overrightarrow{BA}$.

$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

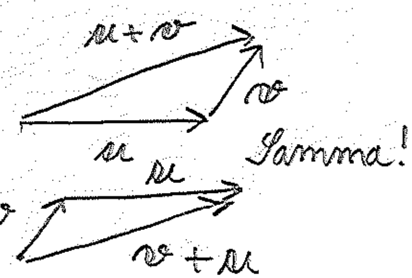
Magnitud (längd) $v = |\mathbf{v}| = |\overrightarrow{AB}| =$
$= \sqrt{(b_x-a_x)^2 + (b_y-a_y)^2 + (b_z-a_z)^2}$.

Fler exempel

- Hastighetsvektor $\mathbf{v}$.
  Magnitud: fart $v = |\mathbf{v}|$ [m/s]
- Kraftvektor $\mathbf{F}$
  Magnitud: kraft $|\mathbf{F}|$ [N]

Räkneoperationer

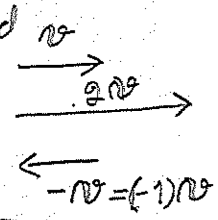
Addition



Multiplikation med skalär (tal)

$t\mathbf{v}$ bestäms av

- magnitud: $|t\mathbf{v}| = |t|\,|\mathbf{v}|$ absbelopp längd
- riktning: som $\mathbf{v}$ om $t>0$
  motsatt $\mathbf{v}$ om $t<0$



Linjär kombination: $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$

Regler

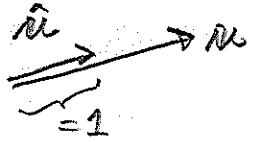
$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ kommutativ lag
$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ associativ lag
$\left\{\begin{array}{l} t(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = t\mathbf{u}+t\mathbf{v} \\ (t+s)\mathbf{u} = t\mathbf{u}+s\mathbf{u} \end{array}\right.$ distributiva lagar

$\left\{\begin{array}{l} 0\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u} \end{array}\right.$ nollvektorn | $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

Obs: $\mathbf{u}$ parallell med $\mathbf{v} \Longleftrightarrow \mathbf{u} = t\mathbf{v}$

Enhetsvektor

$\hat{u} = \dfrac{u}{|u|}$ (om $u \neq 0$)



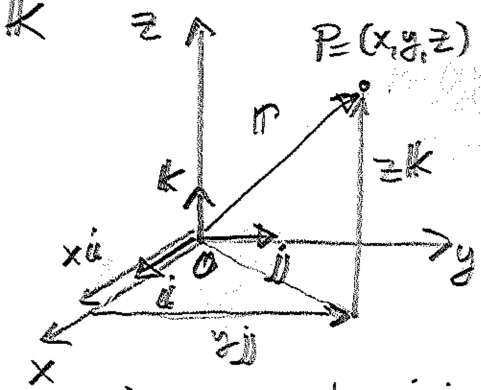
Basvektorer

i, j, k

$i = \overrightarrow{O(1,0,0)}$ osv

Ortsvektorn för P:

$r = xi + yj + zk$



Vi skriver ofta som matris: (dock ej i Adams)

$r = [x, y, z]$ eller $r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Mer allmänt:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k.$

Skalärprodukt

$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$

$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

Måste skrivas med prick!

$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Regler

$u \cdot v = v \cdot u$

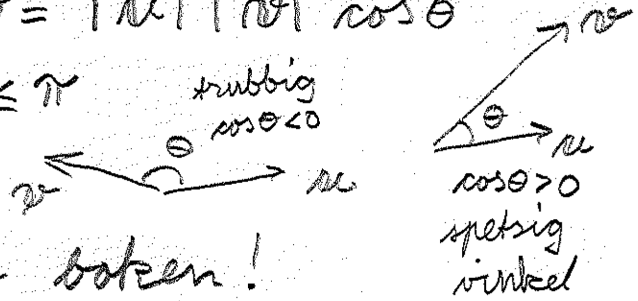
$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

$(tu) \cdot v = t(u \cdot v)$

Sats 1

$u \cdot v = |u|\,|v| \cos\theta$

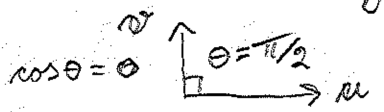
$0 \leq \theta \leq \pi$



Läs beviset i boken!

Obs: 1. $u \cdot u = |u|^2$ $(\cos\theta = 1)$

2. $\left\{ \begin{array}{l} u \cdot v = 0 \iff u \perp v \text{ ortogonala} \\ u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{array} \right.$



3. $i \cdot i = 1$, $i \cdot j = 0$, $i \cdot k = 0$, osv

4. $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, trubbig, rät, spetsig

5. Matlab: $u' * v$ om på kolonnform

$[u_1\, u_2\, u_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Projektion (Def. 4)

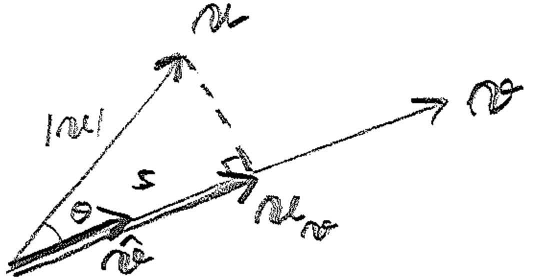
Antag $v \neq 0$.

Skalära projektionen s av u längs v är

$$s = u \cdot \hat{v} = \frac{u \cdot v}{|v|} = |u| \cos\theta$$

Vektorprojektionen u_v av u längs v är

$$u_v = s\hat{v} = (u \cdot \hat{v})\hat{v} = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

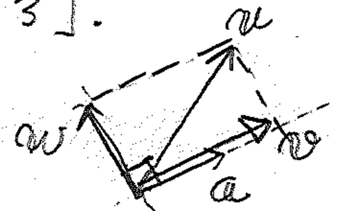


Obs: $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \Rightarrow v \cdot i = v_1$ osv

$v = (v \cdot i)i + (v \cdot j)j + (v \cdot k)k$

Exempel (Ortogonal uppdelning)

Dela upp vektorn $u = [4,5,6]$ som $u = v + w$, där $v \perp w$ och v är parallell med $a = [1,2,3]$.



Lösning Tag v som vektorprojektionen av u längs a:

$$v = (u \cdot \hat{a})\hat{a} = \frac{u \cdot a}{|a|^2} a = \frac{[4,5,6]\cdot[1,2,3]}{1^2+2^2+3^2}[1,2,3] = \frac{32}{14}[1,2,3] = \left[\frac{16}{7}, \frac{32}{7}, \frac{48}{7}\right]$$

Sedan blir

$$w = u - v = \left[\frac{28-16}{7}, \frac{35-32}{7}, \frac{42-48}{7}\right] = \left[\frac{12}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}\right]$$

Alternativ: $\begin{cases} v = ta & (v \text{ parallell med } a) \\ w \cdot a = 0 & (\text{ortogonala}) \end{cases}$

Multiplicera $u = v + w$ med a:

$u \cdot a = v \cdot a + w \cdot a = t\, a \cdot a + 0 = t|a|^2$

$t = \frac{u \cdot a}{|a|^2}$, $v = ta = \frac{u \cdot a}{|a|^2} a$, sedan som ovan. Gör beräkningarna i Matlab!