Idag: Dimension och rang.
4.5, 2.8, 2.9

Vi har sett att om V har en bas $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ så är V isomorft med ("har samma linjära struktur som") $\mathbb{R}^n$.
Isomorfismen ges av koordinatavbildningen:

$$T: \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

(skriver även $V \cong \mathbb{R}^n$)

Ex $V_5 = \{$polynom grad $\leq 5\}$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_5 x^5$, $\mathcal{B}=\{p_0,\dots,p_5\}$

$$T: \begin{cases} V_5 \longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ p \longmapsto [p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_5 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad p_k(x) = x^k$$

Verkar troligt att alla baser för V har n element, dvs lika många som $\mathbb{R}^n$.
Vi visar detta i två satser.

Sats 9 (i 4.5) Låt $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ vara en bas för V. Då är varje delmängd av V med fler än n element linjärt beroende.

(Dvs alla baser har max n element)

Bevis Låt $U=\{u_1,\dots,u_p\} \subset V$ med $p>n$. Vi har visat satsen för $\mathbb{R}^n$ (Sats 8 i 1.7). Alltså är koordinatvektorerna $\{[u_1]_{\mathcal{B}},\dots,[u_p]_{\mathcal{B}}\}$ linj. beroende i $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \exists \{c_k\}_{k=1}^p$ ej alla $=0$ så att

$$0 = c_1[u_1]_B + \dots + c_p[u_p]_B = [c_1u_1 + \dots c_pu_p]_{[B]}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} + \dots + c_p \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \right)$$

$\Rightarrow c_1u_1 + \dots + c_pu_p = 0$ (ej alla $c_k = 0$)

$\Rightarrow u_1, \dots, u_p$ linj. beroende $\square$

Men vi kan låta B och C byta plats och får

$$\#(B) \leq \#(C).$$

Alltså: $\#(B) = \#(C)$. $\square$

Sats 10 (i 4.5) Alla baser för V har lika många element.

Bevis Låt B och C vara baser. Eftersom C är linj. ober. och B är bas så säger Sats 9 att

$$\#(C) \leq \#(B)$$

($\#(A)$ = antalet element i A, kardinalitet)

Def Om V spänns upp av en ändlig mängd så är V __ändligdimensionellt__, annars __oändligdimensionellt__. I ändliga fallet är __dimensionen__ för V

dim V = #(B), där B är en bas.

I oändliga fallet: dim V = ∞.

Om V = {0} är dim V = 0.

Ex $\dim \mathbb{R}^n = n$

Ex $\dim V_5 = 6$

Ex $V = \{$alla talföljder $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\}$

$= \{(x_1, x_2, \dots)\}$

är vektorrum. Kolla detta: addition och multipl. med skalär termvis, se lp 1.

$\dim V = \infty$ ty alla vektorerna

$e_j = (0, \dots, \underset{\uparrow \text{nr } j}{1}, \dots)$ behövs

för att spänna upp V.

V har ingen (ändlig) bas.

Ex Ett plan P $\mathbb{R}^3$ spänns upp av 2 vektorer $\Rightarrow$ $\dim P = 2$

En linje L, en vektor $\dim L = 1$.

Obs: jag menar plan resp. linje genom origo, annars inte vektorrum.

Obs Om $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ så vi reducera till en bas genom att ta bort överflödiga vektorer. (Sats 5 i 4.3)

Omvänt gäller:

Sats 11 (i 4.5) Varje mängd av linj. ober. vektorer i ett underrum U till V med $\dim V < \infty$ kan utökas till en bas för U. Vi har då $\dim U \le \dim V$.

Läs beviset.

Sats 12 (i 4.5)

Låt $\dim V = p$ och B en mängd med $\#(B) = p$. Då är B en bas för V om

1. B är linj. ober.

eller

2. B spänner upp V

Bevis ide: 1. B kan utvidgas till bas med $\dim V = p$ utan att lägga till någon vektor enl. Sats 11.

2. B kan reduceras till B med $\dim V = p$ utan att ta bort någon vektor enl. Sats 5.

Speciella underrum i $\mathbb{R}^n$.

Låt $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Bestäm en bas för

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

dvs reducera $\{a_1, \dots, a_n\}$ till en linj. oberoende mängd.

Obs: $\{a_1, \dots, a_n\}$ linj ober

$\iff$ $Ax = 0$ har bara triv. lösn $x = 0$.

Obs: Om $A \sim B$ så har $Ax = 0$ och $Bx = 0$ samma lösningar.

Alltså: räcker testa med radreducerad standardmatris.

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$

$Bx = 0 \iff x = \begin{bmatrix} +2x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (x_3 fri variabel)

$B = [b_1, b_2, b_3]$, välj $x_3 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ får ett linjärt samband

$2b_1 - 3b_2 + b_3 = 0$ och $\{b_1, b_2\}$ linj ober.

$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 + a_3 = 0$ och $\{a_1, a_2\}$ linj ober.

$\Rightarrow \{a_1, a_2\}$ bas för Col(A).

Generellt:

$\boxed{\text{A:s pivotkolonner är en bas för Col(A)}}$

Vad gäller för $\text{Nul}(A) = \{x : Ax = 0\}$?

Ex Samma A och B.

$Ax = 0 \iff Bx = 0 \iff x = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

så att $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är bas för Nul(A).

Generellt:

$\boxed{\text{En bas för Nul(A) fås genom att skriva lösningarna till } Ax = 0 \text{ på parameterform.}}$

Obs: dim Nul(A) = antalet fria variabler.

Radrummet

$\text{Row}(A) = \{$ alla linj komb. av A:s rader $\}$.

Radreducering $A \sim B$ ger att varje rad i B är linj komb. av rader i A $\Rightarrow$ raderna spänner samma rum

$\Rightarrow$ Om $A \sim B$ så är $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$.

Ex igen. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vi ser att raderna $[1\ 0\ -2]$ och $[0\ 1\ 3]$ i B är linj. ober., så raderna $\{[1\ 0\ -2], [0\ 1\ 3]\}$ är en bas för $\text{Row}(A)$.
(Linj. ober och spänner upp $\text{Row}(A)$.)

Generellt:

$\boxed{\text{Om } A \sim B \text{ så är } B\text{:s icke-noll rader en bas för } \text{Row}(A).}$

Obs: $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$ ty lika många icke-noll rader som pivotkolonner.

Rang (rank)

Def $\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A)$

Eftersom
$\dim \text{Nul}(A) = \#\{\text{fria var.}\} = \#\{\text{kolonner}\} - \#\{\text{pivotkolonner}\}$
får vi följande sats.

Rangsatsen Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ så gäller det att

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Row}(A)$$

och

$$\operatorname{rank}(A) + \dim \operatorname{Nul}(A) = n$$

Sats 8 i 2.3 om inverterbara matriser kan nu formuleras om enligt följande.

(obs att $m = n$ här)

Sats (sid 253)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar om och endast om ett av följande gäller.

1. A:s kolonner är en bas för $\mathbb{R}^n$.
2. $\operatorname{Col}(A) = \mathbb{R}^n$
3. $\dim \operatorname{Col}(A) = n$
4. $\operatorname{rank}(A) = n$
5. $\operatorname{Nul}(A) = \{0\}$
6. $\dim \operatorname{Nul}(A) = 0$

Stig Larsson stig@chalmers.se