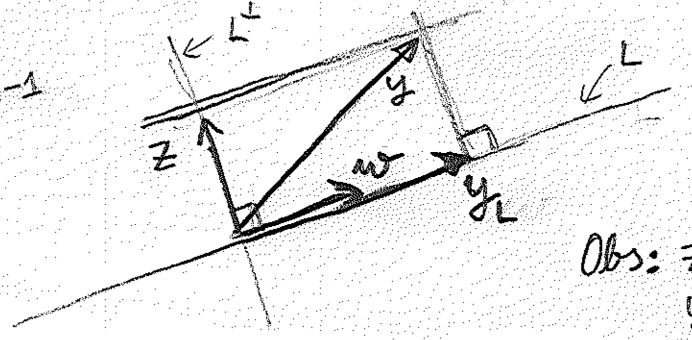
Idag: Ortogonal projektion 6.3
Gram-Schmidt 6.4

Vi vet hur man projicerar y ortogonalt på linjen $L = \text{span}\{w\}$ som spänns av w:

$$y_L = (y \cdot \hat{w})\hat{w} = \frac{y \cdot w}{w \cdot w}$$

Vi får en <u>ortogonal uppdelning</u> av y: det finns <u>unika</u> vektorer y_L och z så att $y_L \parallel w$, $z \perp w$ och $y = y_L + z$.

$\dim L^\perp = n-1$
$\dim L = 1$



Obs: $z \in L^\perp$ och $y_L \in L$

På liknande vis kan man projicera ortogonalt på ett allmänt underrum W.

<u>Sats 8</u> Låt W vara underrum i $\mathbb{R}^n$. Då kan varje $y \in \mathbb{R}^n$ skrivas på ett unikt sätt som

$$y = y_W + z$$

där $y_W \in W$ och $z \in W^\perp$.

Om $\{u_1, \dots, u_p\}$ är en ortogonalbas för W så ges y_W av

$$(*) \quad y_W = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

och $z = y - y_W$.

$y_W = \operatorname{proj}_W(y)$ kallas ortogonala projektionen av y på W.

<u>Bevis</u> Låt $\{u_1, \dots, u_p\}$ vara ortogonalbas för W och definiera y_W som i (*) och $z = y - y_W$. Då fås $y_W \in W$ och

$$z \cdot u_i = (y - y_W) \cdot u_i = y \cdot u_i - \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \underbrace{u_1 \cdot u_i}_{=0} - \dots - \underbrace{\frac{y \cdot u_i}{u_i \cdot u_i} u_i \cdot u_i}_{= y \cdot u_i} - \dots - \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} \underbrace{u_p \cdot u_i}_{=0}$$

$$= y \cdot u_i - y \cdot u_i = 0$$

Alltså $z \in W^\perp$.

Antag nu att uppdelningen inte är unik, dvs det finns även $y = \tilde{y}_W + \tilde{z}$ med $\tilde{y}_W \in W$ och $\tilde{z} \in W^\perp$.

Då fås $y_W + z = \tilde{y}_W + \tilde{z}$

dvs $y_W - \tilde{y}_W = \tilde{z} - z$.

Men då måste $v = y_W - \tilde{y}_W \in W$ och $v = \tilde{z} - z \in W^\perp$. Men den enda vektor som ligger i både W och $W^\perp$ är 0. Alltså: $v = 0$ och därmed $y_W = \tilde{y}_W$ och $z = \tilde{z}$. $\square$

<u>Obs:</u> Formeln (*) blir enklare om vi har en ON-bas:

$$y_W = (y \cdot u_1) u_1 + \dots + (y \cdot u_p) u_p$$

ty $u_i \cdot u_i = 1$.

Ex Från F16.

$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

är en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$.

Tag $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ och projicera ortogonalt på $W = \text{span}\{u_1, u_2\}$.

Vi får

$$y_W = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 =$$

$$= \frac{11}{11} u_1 + \frac{-12}{6} u_2 = u_1 - 2u_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och

$$z = y - y_W = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} = -u_3$$

så $z \in W^\perp = \text{span}\{u_3\}$.

Obs: Om $y \in W$ så är (*) samma formel som i Sats 5.

Alltså:

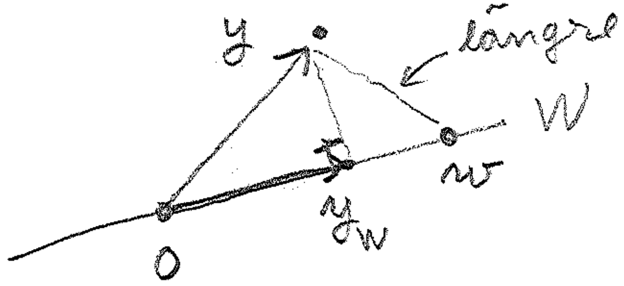
$$y \in W \Rightarrow y_W = y.$$

Vi anar också y_W är den närmsta vektorn till y i W. Detta är Sats 9.

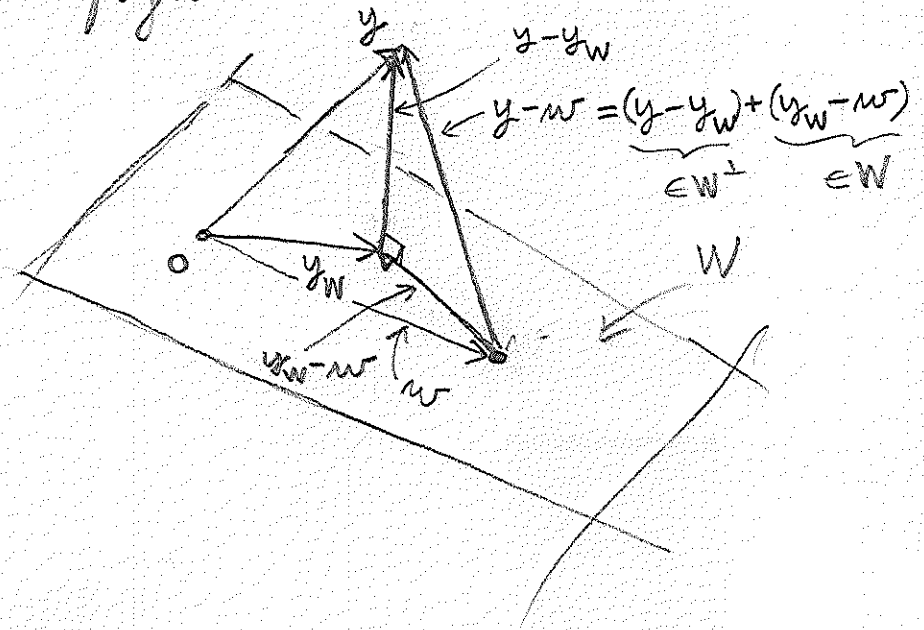
Sats 9 (Bästa approximation)

$$\|y - y_W\| < \|y - w\|$$

för alla $w \in W$ med $w \neq y_W$.



Bättre figur.



Bevis Tag $w \in W$ med $w \neq y_W$.

Sats 8 ger $y = y_W + (y - y_W)$, där $y - y_W \in W^\perp$.

Dessutom: $y_W - w \in W$.

Alltså: $y - y_W \perp y_W - w$ och vi får ortogonal uppdelning

$$y - w = (y - y_W) + (y_W - y_W).$$

Pythagoras ger

$$\|y - w\|^2 = \|y - y_W\|^2 + \underbrace{\|y_W - w\|^2}_{>0}$$

där $\|y_W - w\| > 0$ ty $y_W \neq w$.

Alltså: $\|y - w\|^2 < \|y - y_W\|^2$

dvs $\|y - w\| < \|y - y_W\|$ $\square$.

Sats 10 Om $\{u_1, \dots, u_p\}$ ON-bas för W

så
$$y_W = \sum_{i=1}^{p} (y \cdot u_i) u_i .$$

Med $U = [u_1, \dots, u_p]$ fås

$$y_W = \text{proj}_W(y) = UU^T y$$

dvs matrisen för projektionsavbildningen är UU^T.

Bevis $y_W = \sum_{i=1}^{p} c_i u_i$ är på matrisform

$$y_W = Uc.$$

Men $y = y_W + z$

så att $U^T y = U^T y_W + \underbrace{U^T z}_{=0} = U^T y_W = \underbrace{U^T U}_{=I} c = c$

Sats 6

$$UU^T y = Uc = y_W$$

$\square$

Ex Samma. $W = \text{span}\{u_1, u_2\}$

Normera $\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$, $\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{11} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}6\\1\\-8\end{bmatrix}$$

$$y_W = UU^T y = \text{matlab} = \begin{bmatrix}5\\-3\\-1\end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt-processen 6.4

Hur hitta en ortogonalbas för W?

Tag en bas $\{x_1, \dots, x_p\}$ för W.

Bilda en ortogonal bas $\{v_1, \dots, v_p\}$

som också spänner upp W.

1. $v_1 = x_1$, $W_1 = \text{span}\{v_1\}$

2. $v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = x_2 - \text{proj}_{W_1}(x_2) \in W_1^\perp$

Då blir

$$v_2 \cdot v_1 = x_2 \cdot v_1 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \cdot v_1 = 0$$

och $v_2 \in \text{span}\{x_1, x_2\} = \text{span}\{v_1, v_2\} = W_2$

3. $v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = x_3 - \text{proj}_{W_2}(x_3) \in W_2^\perp$

$W_3 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$

4. $v_4 = x_4 - \text{proj}_{W_3}(x_4) \in W_3^\perp$

$W_4 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_4\}$

osv.

Läs Sats 11 och Exempel 2.

Hoppa över QR-faktorisering.