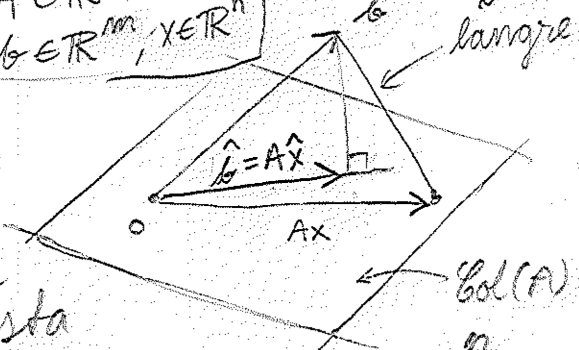
Idag: * Minstakvadratmetoden 6.5
* Linjär regression 6.6
* Intro till Datorövning
* Skalärprodukrum 6.7
(fortsätter nästa vecka)

6.5 Ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$ är inkonsistent om $b \notin Col(A)$.

$\boxed{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ b \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n}$

Då finns ingen lösning, men vi kan göra bästa



möjliga genom att hitta $x \in \mathbb{R}^n$ så att $\|Ax-b\|$ blir minimal.

Obs: samma som att minimera $\|Ax-b\|^2$, därför "minstakvadrat".

Satsen om "bästa approximation" (Sats 9) säger att bästa approx. till b i $Col(A)$ är

$$\hat{b} = proj_{Col(A)}(b).$$

Men $\hat{b} \in Col(A)$ så det finns $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ så att

$$A\hat{x} = \hat{b}.$$

Hur beräkna $\hat{x}$?

Vi vet att $b - \hat{b} \perp Col(A) = span\{a_1, \dots, a_p\}$ där a_j är kolonnerna i A.

Dvs $a_j^T(b-\hat{b}) = 0 \ \forall a_j$

$\iff a_j^T(b - A\hat{x}) = 0 \ \forall a_j$

$\iff A^T(b - A\hat{x}) = 0$

$\iff A^TA\hat{x} = A^Tb$

Stig Larsson stig@chalmers.se

Alltså: vi ska lösa de så kallade <u>normalekvationerna</u>:

$$(*) \quad A^T A x = A^T b$$

för att få $\hat{x}$.

Obs: $(*)$ kan ha flera lösningar om det finns fria variabler.

<u>Def</u> Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
En vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ kallas <u>minsta-kvadratlösning</u> till $Ax = b$ om

$$\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Sats 13</u> Mängden av minsta-kvadratlösningar till $Ax = b$ är lika med lösningsmängden till normalekvationerna

$$A^T A x = A^T b.$$

Utan bevis.

Gör Example 2 i Matlab.

Obs: $A^T A$ är symmetrisk

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

6.6 Linjär regression

Datorövning vecka 6:

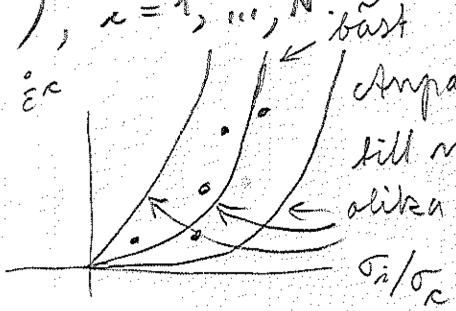
Nortons modell för krypning

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^n \quad \text{(ickelinjär modell)}$$

$\dot{\varepsilon}^c$ kryptöjningshastighet och spänningen σ. σ_c är en referensspänning, som man väljer. Experiment: lägg på σ och mät $\dot{\varepsilon}^c$.

Två parametrar τ och n ska bestämmas från mätpunkter

$\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_c}, \dot{\varepsilon}_i^c\right)$, $i = 1, \dots, N$



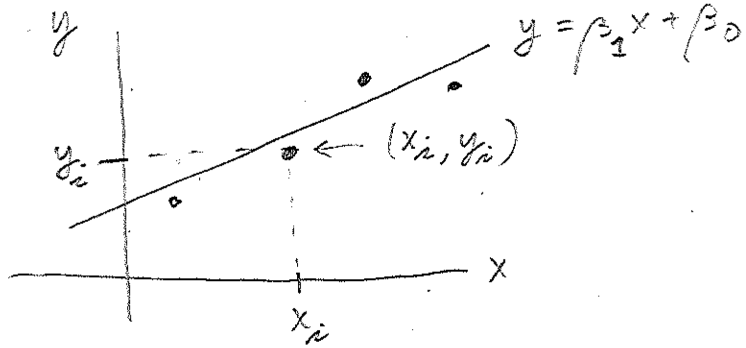
Anpassa kurvan till mätpunkterna.

Ickelinjär funktion, transformera till linjär funktion genom att ta logaritm:

$$\ln(\dot{\varepsilon}^c) = \ln\left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)^n\right)$$

$$\underbrace{\ln \dot{\varepsilon}^c}_{=y} = \underbrace{n}_{=\beta_1} \underbrace{\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right)}_{=x} \underbrace{- \ln(\tau)}_{=\beta_0}$$

$$y = \beta_1 x + \beta_0 \quad \text{(linjär modell)}$$



$$\begin{cases} y_1 = \beta_1 x_1 + \beta_0 \\ y_2 = \beta_1 x_2 + \beta_0 \\ \vdots \\ y_N = \beta_1 x_N + \beta_0 \end{cases}$$

N ekv.
2 obekanta β_0, β_1

$$y = X\beta$$

med $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}$ design-matrisen (man väljer $x_i = \ln(\frac{\sigma_i}{\kappa_c})$ när man designar experimentet)

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ parametervektorn (ska bestämmas)

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$ observationsvektorn (man mäter/observerar töjningshastigheterna)

Inkonsistent system, minsta-kvadratmetoden.

$$\underbrace{X^T X}_{2\times 2}\,\underbrace{\beta}_{2\times 1} = \underbrace{X^T y}_{2\times 1}$$

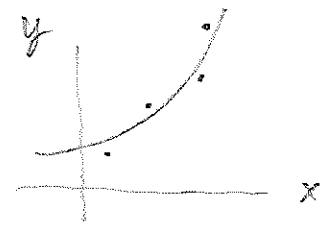
Detta kallas <u>linjär regression</u>, dvs bestämma parametrar i linjär modell.

Mer allmän modell

$$y = \beta_0 f_0(x) + \beta_1 f_1(x) + \dots + \beta_p f_p(x)$$

kan behandlas med denna metod.

T.ex. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$



$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 \\ \vdots \\ y_N = \beta_0 + \beta_1 x_N + \beta_2 x_N^2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

6.7 Lite om allmänna skalärproduktrum.

Def Låt V vara vektorrum. En skalärprodukt på V är en reell-värd funktion som till varje par u, v tilldelar ett tal $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ så att

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle$
3. $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle \quad (c \in \mathbb{R})$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$ och $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

Ett vektorrum med skalärprodukt kallas skalärproduktrum.

Ex $\mathbb{R}^n$ med $\langle u, v\rangle = u^T v$.

Ex $V = \mathcal{C}([0,1]) = \{$kontinuerliga funktioner$\}$

med $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

Kolla 1, 2, 3 enkelt.

Villkor 4:

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(x)^2\,dx \geq 0 \quad \forall f$$

$$0 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

$\Rightarrow f(x)^2 = 0 \quad \forall x$, ty annars $f(x)^2 > 0$ på något lite intervall $\Rightarrow \int_0^1 f(x)^2\,dx > 0$.

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow f = 0$ (noll-funktionen)

Då kan vi definiera norm:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Ex $\|f\| = \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{1/2}$.

Allt som vi gjort kan nu göras i allmänt skalärproduktrum.

- * Ortogonalitet: $u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$
- * Ortogonal bas, ortonormal bas.
- * Ortogonal projektion:

$$y_W = \mathrm{proj}_W(y) =$$

$$= \frac{\langle y, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \dots + \frac{\langle y, u_p \rangle}{\langle u_p, u_p \rangle} u_p$$

med ortogonal bas.

- * Gram-Schmidt.

Viktig olikhet:

Sats 16 (Cauchy-Schwarz olikhet)

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\|$$

(absolutbelopp)

Bevis: Om $u = 0$ så är det trivialt.

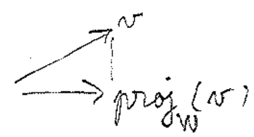
Om $u \neq 0$, bildar vi $W = \mathrm{span}\{u\}$.

Vi får:

$$\|\mathrm{proj}_W(v)\| = \left\| \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right\| =$$

$$= \left| \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \right| \|u\| = \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\|^2} \|u\| =$$

$$= \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\|}. \text{ Alltså:}$$



$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\|} = \|\mathrm{proj}_W(v)\| \overset{\text{Pythagoras}}{\le} \|v\|$$

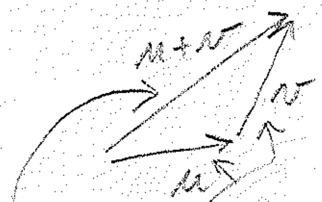
dvs $|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \, \|v\|$. $\square$

En olikhet till:

<u>Sats 17</u> (Triangelolikheten)

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

Läs beviset.

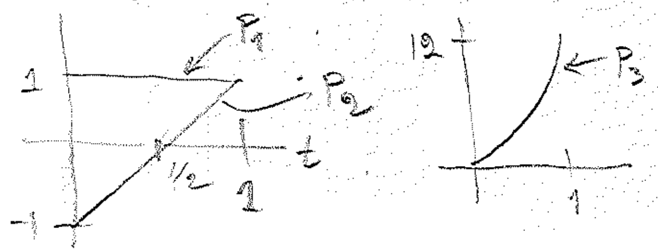


den är kortare än dom tillsammans

<u>Ex</u> $V = \mathcal{C}([0,1])$ med $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg\,dx$.

$P_1(t) = 1$, $P_2(t) = 2t-1$, $P_3(t) = 12t^2$

är linjärt oberoende.



Ortogonalisera med Gram-Schmidt:

1. $q_1 = P_1$, $W_1 = \operatorname{span}\{q_1\} = \mathbb{P}_0 = \{\text{poly. grad } 0\}$

2. $q_2 = P_2 - \dfrac{\langle P_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 = P_2 - \operatorname{proj}_{W_1}(P_2)$

där $\langle P_2, q_1\rangle = \langle P_2, P_1\rangle = \int_0^1 (2t-1)\,1\,dt = 0$

dvs P_2, P_1 redan ortogonala.

Alltså:

$q_2 = P_2$ och $W_2 = \operatorname{span}\{q_1, q_2\} = \mathbb{P}_1$

3. $q_3 = P_3 - \dfrac{\langle P_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 - \dfrac{\langle P_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2$

$= P_3 - \operatorname{proj}_{W_2}(P_3)$ där

$\langle P_3, q_1\rangle = \int_0^1 12t^2 \cdot 1\,dt = 4$

$\langle q_1, q_1\rangle = \int_0^1 1^2\,dt = 1$

$\langle P_3, q_2\rangle = \int_0^1 12t^2 \cdot (2t-1)\,dt = \dots = 2$

$\langle q_2, q_2\rangle = \int_0^1 (2t-1)^2\,dt = \dots = \frac{1}{3}$

Alltså: $\text{proj}_{W_2}(p_3) = \frac{4}{1} q_1 + \frac{2}{1/3} q_2 =$

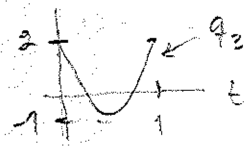
$= 4q_1 + 6q_2$

och

$$q_3 = p_3 - 4q_1 - 6q_2, \quad W_3 = \text{span}\{q_1, q_2, q_3\} = \mathbb{P}_2$$

dvs

$$\begin{cases} q_3(t) = 12t^2 - 4\cdot 1 - 6(2t-1) \\ \quad = 12t^2 - 12t + 2 = 12t(t-1) + 2 \\ q_2(t) = 2t - 1 \\ q_1(t) = 1 \end{cases}$$

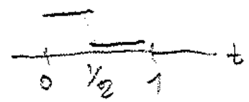


är en ortogonalbas för underrummet $\mathbb{P}_2 = \{\text{polynom av grad} \le 2\}$.

Finita elementmetoden bygger approximation med polynom. Kommer i Flervariabel i lp. 4.

Vad är bästa approximationen av

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0, & t \in (\frac{1}{2}, 0) \end{cases}$$



med polynom av grad ≤ 1? Vi beräknar

$$p = \text{proj}_{\mathbb{P}_1}(f) = \text{proj}_{W_2}(f) = \frac{\langle f, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 + \frac{\langle f, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2$$

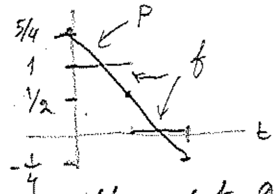
Här är $\langle f, q_1\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot 1\,dt = \int_0^{1/2} dt = 1/2$

$$\langle f, q_2\rangle = \int_0^1 f(t)(2t-1)\,dt = \int_0^{1/2} (2t-1)\,dt = \left[(t^2 - t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

så att

$$p = \frac{\frac{1}{2}}{1} q_1 + \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} q_2 = \frac{1}{2} q_1 - \frac{3}{4} q_2$$

dvs $p(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(2t-1) = -\frac{3}{2}t + \frac{5}{4}$



$\langle q_3, q_3\rangle = \int_0^1 (12t^2 - 12t + 2)^2\,dt = \frac{4}{5}$

$\langle f, q_3\rangle = \int_0^{1/2} (12t^2 - 12t + 2)\,dt = 0$

WolframAlpha

En term till: $\frac{\langle f, q_3\rangle}{\langle q_3, q_3\rangle} q_3 = 0$

dvs ger inget mer.

```
%% Example 2 i 6.7

clear all

A=[1 1 0 0;1 1 0 0;1 0 1 0;1 0 1 0;1 0 0 1;1 0 0 1]
b=[-3 -1 0 2 5 1]'
B=rref([A b])  % ingen lösning

%% normalekvationerna

C=rref([A'*A A'*b])

% vi ser att x(4)=t är fri och x=[3 -5 -2 0]' + t*[-1 1 1 1]'

t=0;
x=[3 -5 -2 0]' + t*[-1 1 1 1]'

r=norm(A*x-b) % residualen

%% backslash varnar men ger en av minstakvadratlösningarna

xx=A\b
```