Idag Repetition

Tentamens upplägg: se "Gamla tentor" på kurshemsidan.

Linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Vektor- och matrisform:

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, $a_i \in \mathbb{R}^m$

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Radreduktion:

$[A\ b] \sim [\tilde{A}\ \tilde{b}]$ $\quad \tilde{A} = E_p \cdots E_1 A$

radoperationsmatriser

reducerad trappstegsmatris

Bundna variabler ← pivotpositioner

Fria variabler ← icke-pivotpositioner

Konsistent om: * pivotposition i varje rad

* $b \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$

$\operatorname{Col}(A) = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$

$\operatorname{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$

$\operatorname{Nul}(A) = \{0\} \iff \{a_1, \dots, a_n\}$ linjärt ober.

$c_1a_1 + \dots + c_na_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$

Linjär avbildning: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

definitionsrum, målrum

$x \mapsto T(x)$

Värderum $= \{Tx : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ bevarar linj. komb.

Matris för T: $T(x) = Ax$

med $A = [T(e_1) \dots T(e_n)] \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Fallet $m=n$: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

A inverterbar om $\exists\, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ så att

$$CA = I = AC$$

Då säger vi $A^{-1} = C$. $[A\ I] \sim [I\ A^{-1}]$

Sats 8 i 2.3:

A inverterbar $\Leftrightarrow$ $Ax=b$ unik lösn $\forall b$ $(x = A^{-1}b)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 0$

$Ax = b$ $\Leftrightarrow$ $x = x_p + x_h$, $x_h \in \mathrm{Nul}(A)$ och x_p en lösning.

LU faktorisering: $A = LU$

fås med radoperationer: $EA = U$ = trappstegsform (ej reducerad), $A = E^{-1}U = LU$

$Ax = b$, $LUx = b$ $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$ triangulära

---

Vektorrum: mängd V som är sluten under linjär komb.

$\begin{cases} x, y \in V \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V$

plus alla räkneregler

Behöver inte vara $\mathbb{R}^n$, t.ex. $V = \mathcal{C}[0,1]$, funktionsrum!

Bas för V: $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ linjärt oberoende mängd, $\dim(V) = n$.

Om ingen bas: $\dim(V) = \infty$.

Underrum: $U \subset V$ om $0 \in U$ och

$\begin{cases} x, y \in U \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U.$

Viktiga underrum ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$):

$\mathrm{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$

$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T) \subset \mathbb{R}^n$

Rangsatsen:

$$\underbrace{\dim \mathrm{Col}(A)}_{\substack{= \mathrm{rank}(A) \\ = \#\{\text{pivotkolonner}\}}} + \underbrace{\dim \mathrm{Nul}(A)}_{= \#\{\text{fria variabler}\}} = n$$

Bas för Col(A) = de kolonner i A som är på pivotposition

Bas för Nul(A) fås ur parameterform med fria variabler som parametrar.

Determinant $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. $n=1$ $\det(a_{11}) = a_{11}$
2. $n=2$ $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
3. Rekursivt med kofaktorutveckling

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

eller i

ta bort rad i och kolonn j

$$\det(EA) = \det(E)\det(A) = \begin{cases} \det(A) & \text{rad } i \leftarrow \text{rad } i + c\,\text{rad } j \\ -\det(A) & \text{rad } i \leftrightarrow \text{rad } j \\ c\det(A) & \text{rad } i \leftarrow c\,\text{rad } i \end{cases}$$

radoper.

"bryt ut c ur rad i"

⇒ gör radoperationer till trappstegsform, sedan multiplicera ihop diagonalelementen.

Räkneregler:

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^T) = \det(A)$.

Egenvärdesproblem ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$\exists\, x \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ så att $Ax = \lambda x$

$\Leftrightarrow (A-\lambda I)x = 0$ har icke-triv. lösn

$\Leftrightarrow \det(A-\lambda I) = 0$

Egenrum för λ_k: $E_{\lambda_k} = \text{span}\{$ alla egenvektorer till $\lambda_k \}$. $P = [v_1, \dots v_n]$

$AP = PD$ (dvs $Av_k = \lambda_k v_k$ på matrisform)

A är diagonaliserbar om P inverterbar

$A = PDP^{-1}$, $D = P^{-1}AP$

Detta gäller om * alla λ_k distinkta

eller * $A^T = A$ i så fall P

P ortogonal dvs P^TP

P inverterbar $\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ en bas för $\mathbb{R}^n$.

Ortogonalitet

$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

Pythagoras: $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$\{u_1, \dots, u_p\}$ ortogonal mängd om $u_i \cdot u_j = 0,\ i \neq j$

ortonormal om $u_i \cdot u_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow$ linj ober. $\Rightarrow$ bas för $W = \text{span}\{u_1 \dots u_p\}$

Koordinater för $x \in W$:

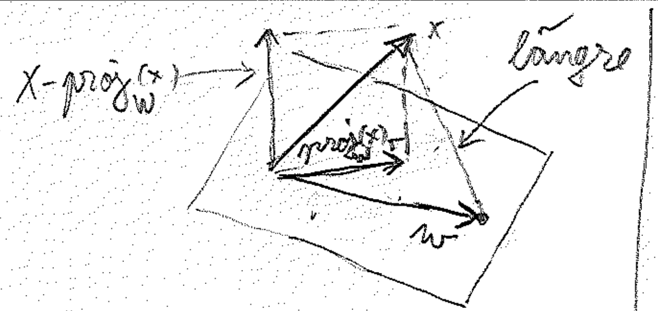
$$x = \frac{x\cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

Om $x \notin W$, ortogonal proj på W:

$$\text{proj}_W(x) = \frac{x\cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$$

Ortogonal uppdelning:

$$x = \underbrace{\text{proj}_W(x)}_{\in W} + \big(\underbrace{x - \text{proj}_W(x)}_{\in W^\perp}\big)$$ (unik uppdelning)



Bästa approx:

$$\|x - \mathrm{proj}_W(x)\| < \|x - w\| \quad \forall w \in W,\ w \neq \mathrm{proj}_W(x)$$

Med ortonormal bas (ON-bas)

$U = [u_1, \dots, u_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ fås

$$\mathrm{proj}_W(x) = UU^T x, \text{ ty } = [u_1, \dots, u_p] \begin{bmatrix} u_1^T x \\ \vdots \\ u_p^T x \end{bmatrix} = \boxed{(u_1^T x)\, u_1 + \dots + (u_p^T x)\, u_p}$$

Med $p = n$: $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är ortogonal matris: $U^T U = I$, $U^{-1} = U^T$

$$\text{ty } (U^T U)_{ij} = u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Minstakvadratlösning till $\underbrace{Ax = b}_{\text{olösbart}}$ ges av

$$A^T A x = A^T b.$$

Minimerar residualen: $\|Ax - b\|$.

Kvadratisk form: $Q(x) = x^T A x$, $A^T = A$

$$A = PDP^{-1},\ x = Py \Rightarrow x^T A x = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$\Rightarrow$ lätt att se vilka värden $Q(x)$ tar.

T.ex. $Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$ (pos. definit) $\iff$ alla $\lambda_j > 0$.

Lycka till med tentan!

/Stig