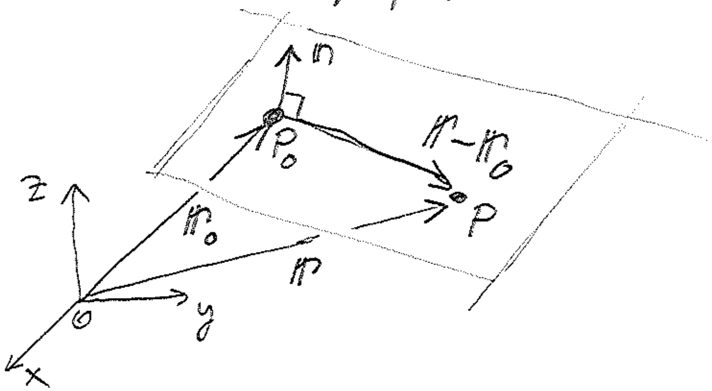
Idag: Skalär trippelprodukt (från F2)
10.4 Planet och linjen

Ett plan i rummet bestäms av

1. en punkt P_0 i planet:
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ med
ortsvektor
$\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = [x_0, y_0, z_0] = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$

2. en normalvektor $\mathbf{n}$
som är ortogonal till planet:
$\mathbf{n} = [A, B, C] = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$



Punkten $P = (x, y, z)$, $\mathbf{r} = [x, y, z]$
ligger i planet om och endast om

$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n}$

(1) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

(2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

(3) $Ax + By + Cz = D$ $(D = Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

(1) eller (2) är planets ekvation i vektorform

(3) är planets ekv i normalform

(3) är en linjär ekvation i tre variabler
Den representerar alltid ett plan (såvida inte $A = B = C = 0$). Man kan läsa av en normalvektor $\mathbf{n} = [A, B, C]$ och en punkt, t.ex. genom att välja $y_0 = z_0 = 0$ och lösa ut $x_0 = D/A$ (om $A \neq 0$).

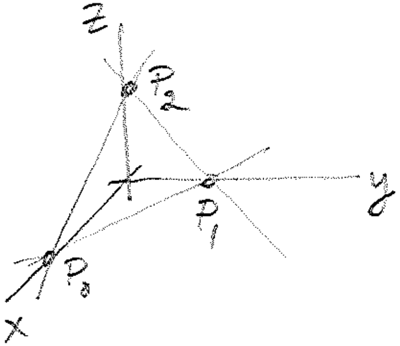
Att kunna: känna igen och ställa upp planets ekvationer.

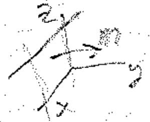
Exempel $x+y+z=1$

En normalvektor: $n=[1,1,1]$

En punkt: $y_0=z_0=0 \Rightarrow x_0=1$, $P_0=(1,0,0)$

På samma vis: $P_1=(0,1,0)$, $P_2=(0,0,1)$



> **Exempel** $x=0$
>
> Vi ser $n=[1,0,0]=i$.
>
> $x=y=z=0$ uppfyller ekv.
>
> origo är i planet.
>
> Alltså: yz-planet.
>
> 
>

Exempel Bestäm ekv. för planet som går genom de tre punkterna $P_0=(1,0,0)$, $P_1=(0,1,0)$, $P_2=(0,0,1)$.

Välj en punkt: $P_0=(1,0,0)$

Två vektorer parallella med planet: $u_1=\overrightarrow{P_0P_1}=(-1,1,0)$, $u_2=\overrightarrow{P_0P_2}=(-1,0,1)$.

En normalvektor:

$$n = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1,1,1].$$

Planets ekv: $n\cdot(r-r_0)=0$

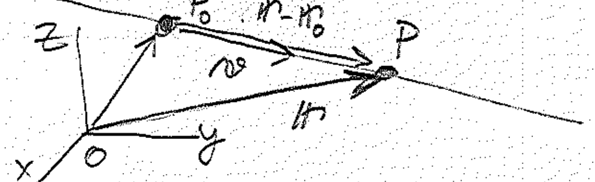
$$[1,1,1]\cdot[x-1,\ y-0,\ z-0]=0$$

$$(x-1)+(y-0)+(z-0)=0$$

$$x+y+z=1$$

En <u>linje</u> i planet bestäms av

1. en <u>punkt</u> P_0 på linjen
2. en <u>riktningsvektor</u> v parallell med linjen



$v=[a,b,c]$

$P_0=(x_0,y_0,z_0)$

P är på linjen om och endast om

$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ är parallell med $\mathbf{v}$

$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ för något t

(1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ (vektorform)

(2) $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ (komponentform)

(1) och (2) är <u>linjens ekv på parameter-form</u>, $t \in (-\infty, \infty)$ är en <u>parameter</u>.

Om $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ kan man elimera t:

$$t = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

och få linjens ekv. på <u>normalform</u>

(3) $$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Om t.ex. $c=0$ får man istället

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0$$

Att kunna: känna igen och ställa upp linjen ekvationer.

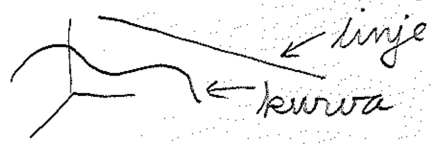
<u>Exempel</u> $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+5t \\ z = 3+6t \end{cases}$

Rät linje genom $(1,2,3)$ parallell med $[4,5,6]$.

Normalform: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{6}$

Obs: linje = rät linje.

En "krökt linje" kallas <u>kurva</u>.



Kommer i Flervariabel i läsperiod 4.

Läs Exempel 7, 8, 9 om <u>avstånd</u>.

Fantastiskt att man kan räkna ut så svåra saker så lätt med vektorer!