Idag: Matrisinvers, forts. 2.2, 2.3
LU-faktorisering 2.5
(Blockmatriser översiktligt 2.4)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar om det finns $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så att

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Hur beräkna A^{-1} (om den finns)?

Svar: radreducera $[A\ I_n] \sim [I_n, A^{-1}]$.

För att bevisa detta skriver vi radoperationerna som matrismultiplikationer.

Ex
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = I_3 - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

så att med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$E_1 A = A - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

dvs addera $-2 *$ rad 2 till rad 3.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ byter plats på rad 2 och 3 (permutation)

$$E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ $2 *$ rad 1 (skalning)

Dessa tre slags matriser kallas elementära matriser. Motsvarar tre slags elementära radoperationer.

Sats De elementära matriserna är inverterbara.

Bevis Radoperationer är reversibla.

Ex $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ addera $2 *$ rad 2 till rad 3.

Sats 7 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar omm A är radekvivalent med I_n. De radoperationer som reducerar A till I_n reducerar I_n till A^{-1}.

Dvs $[A\ I] \sim [I\ A^{-1}]$.

Bevis ($\Rightarrow$): A inverterbar $\overset{\text{Sats 5}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ $Ax = b$ lösbart för alla b

$\overset{\text{Sats 4, kap 1.}}{\Rightarrow}$ A har pivotposition i varje kolonn $\begin{bmatrix} * & & * \\ & * & \\ 0 & & * \end{bmatrix}$

$\overset{A\ n \times n}{\Rightarrow}$ $A \sim I_n$

($\Leftarrow$): $A \sim I_n$ betyder $E_p E_{p-1} \cdots E_1 A = I_n$ för några elem. matriser

$\overset{\text{Sats 6}}{\Rightarrow}$ $A = (E_p \cdots E_1)^{-1} I_n = (E_p \cdots E_1)^{-1}$ (produkten är inv. bar)

$\Rightarrow A^{-1} = \left((E_p \cdots E_1)^{-1}\right)^{-1} = E_p \cdots E_1 =$

$= E_p \cdots E_1 I_n$ samma radoper.

$\square$

För att beräkna A^{-1}: radreducera $[A\ I]$, det ger antingen $[I\ A^{-1}]$ eller visar att A är singulär.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (-1) $\quad [A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $E[A\ I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

Alltså: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ singulär

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (-3) $\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $(-\frac{1}{2})$ $\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (-2) $\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ forts.

$E_3 \; E_2 \; E_1 A = I$ Matlab!

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Obs: Vi beräknar A^{-1} för teorins skull, sällan för att lösa $Ax = b$ med $x = A^{-1}b$.
Det är bättre att lösa LES genom att radreducera $[A|b]$.

2.3 Karakterisering av inverterbara matriser.

Sats 8 Läs! 12 påståenden är ekvivalenta med A inverterbar

Jag visar den på skärmen och diskuterar beviset.

Ex 1
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \overset{(-3)\;(5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi ser redan här att A är inverterbar för vi har pivotpositioner i varje kolonn.
För att bestämma A^{-1} måste vi fortsätta reduceringen.

2.5 Faktorisering

Skriv matrisen A som en produkt:

$$A = BC$$

Att faktorisera (finna B, C) är en <u>analys</u> av A (dela upp).

Givet B, C, beräkna $CB = A$ är då en <u>syntes</u> (sätta ihop).

Detta förekommer i många sammanhang.

Vi börjar med <u>LU</u>-faktorisering $A = LU$, i kap 2.5.

<u>Ex</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (2) \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} (-2) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

trappstegsmatris, upper triangular <u>övertriangulär</u>

Alltså:

$$U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{=E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=E_1} A, \quad U = E_3E_2E_1A$$

Elementära matriser av typ 1. De är <u>undertriangulära</u> med 1 på diagonalen.

Ej använd E av typ 2 (permutera rader) eller typ 3 (skala rad).

$$A = (E_3E_2E_1)^{-1}U = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U =$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}}_{\text{också undertriangulära med 1 på diagonalen}}U=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}}_{=L}U=LU$$

också undertriangulär med 1 på diagonalen.

Vi har en LU faktorisering av A: $A=LU$

där L "unit lower triangular"

U "upper triangular"

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1& &0\\ *&\ddots& \\ *&\cdots&1\end{bmatrix}}_{=L}\underbrace{\begin{bmatrix}*&\cdots&*\\ &\ddots&\vdots\\ 0& &*\end{bmatrix}}_{=U}$$ (alla är $n\times n$)

Metod: 1. radreducera

$$E_p\cdots E_1A=U$$

2. multiplicera ihop

$$L=E_1^{-1}\cdots E_p^{-1}$$

Mer effektivt är att observera att

$$E_p\cdots E_1L=I$$

(dvs $L=(E_p\cdots E_1)^{-1}$) och placera in kolonner i L så att detta gäller. Dvs utan multiplikation.

Ex samma som förut.

Vi har radreducerat och vet E_1, E_2, E_3.

Vi vill bestämma L så att $E_3E_2E_1L=I$

Bara E_1, E_2 påverkar kolonn 1 i L.

Då måste kol. 1 i L vara $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

Bara E_3 påverkar kol. 2.

Då måste kol. vara $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$. Sist kol 3: $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

Alltså $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Varför är $A = LU$ bra?

Effektiv lösning av $Ax = b$.

Vi får $(LU)x = b$

$L(Ux) = b$

Sätt $y = Ux$ och $Ly = b$

Metod: 1. lös $Ly = b$

2. lös $Ux = y$

Två triangulära system, lätta att lösa: n^2 operationer vardera.

Men måste först bestämma L, U vilket kostar $\frac{2}{3}n^3$ operation

Direkt lösning av $Ax = b$ med Gauss-elimination kostar också $\frac{2}{3}n^3$ operationer.

Alltså: LU lönar sig om man ska lösa $Ax = b$ med samma A men många olika b.

Och när n är stort, t.ex. $n = 10^5$ eller 10^6.

Då är $n^2 << n^3$.

Läs 2.4 översiktligt.

Sammanfattning:

Radreducering och invers matris används för teori och förståelse av matriser och linjära transformationer och ekvationssystem, inte så ofta för lösning.

LU-faktorisering är en algoritm som implementeras i datorprogram och används för effektiv lösning av (stora) linjära ekv. system.

Blockmatris 2.4

Ibland är det fördelaktigt att dela upp en (stor) matris i block och räkna blockvis.

T.ex.

$$\begin{array}{c} m \\ q \\ \end{array}\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right] \\ n \quad p \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}\right] \\ r \end{array}\begin{array}{c} n \\ p \\ \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} AX+BY \\ CX+DY \end{array}\right] \\ r \end{array}\begin{array}{c} m \\ q \\ \end{array}$$

Produkterna AX, BY, CX, DY kan beräknas separat (parallellt).

Ex

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 8 & 9 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} 1 \\ \begin{bmatrix} 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 8 \cdot 1 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix} \qquad * = \text{orkar inte räkna ut.}$$

```
%% Matlab-kod till LU-exemplet

clear all
A=[2 4 -1;-4 -5 3;2 10 4]
E1=[1 0 0;2 1 0;0 0 1]
E2=[1 0 0;0 1 0;-1 0 1]
E3=[1 0 0;0 1 0;0 -2 1]
U=E3*E2*E1*A

%% inversa elementärmatriser
E11=[1 0 0;-2 1 0;0 0 1]
E22=[1 0 0;0 1 0;1 0 1]
E33=[1 0 0;0 1 0;0 2 1]
L=E11*E22*E33
```