TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom presentation av kryssuppgifter. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Lycka till!

Tony

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Ange hur många lösningar följande ekvationssystem har: (3p)

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 1x_1 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Om det finns precis en lösning, ange även denna.

Lösning: Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & -29 & -27 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

dvs. ekvationssystemet har lösningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$ då $A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Radreduktion ger

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -25/2 & -25/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. det finns två pivotpositioner och en bas för $\operatorname{Col} A$ ges därmed av de två första kolonnerna i A: $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Bestäm det karakteristiska polynomet och egenvärdena för matrisen A i föregående uppgift. (3p)

Lösning: Det karakteristiska polynomet är $\det(A - \lambda I)$. För att räkna ut determinanten är det enklast att kofaktorexpandera längs kolonn 3 (p.g.a. nollorna). Vi får att

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (5-\lambda)\Big((5-\lambda)(-4-\lambda) + 20\Big) \\ &= (5-\lambda)\Big(\lambda^2 - \lambda\Big) \\ &= (5-\lambda)\lambda(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Egenvärdena ges av $\det(A - \lambda I) = 0$, dvs. de är 0, 1 och 5.

4. Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ och bestäm alla matriser A som kommuterar med B, dvs. $AB = BA$. (3p)

Lösning: Vi ansätter $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och räknar ut AB och BA:

$$AB = \begin{bmatrix} a+2b & 3b \\ c+2d & 3d \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix}.$$

Från detta ser vi direkt att $b = 0$ eftersom $c = 3b$. Ersätter vi b med 0 så får vi de tre ekvationerna $a = a$, $d = d$ och $2a + 2c = 2d$. Alltså har vi två fria parametrar, t.ex. a och d, och den sista ekvationen ger $c = d - a$. Alla matriser som kommuterar med B kan alltså skrivas som

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ d-a & d \end{bmatrix},$$

där $a, d \in \mathbb{R}$.

5. Låt planet P ha basen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och låt $p = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $q = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$. (3p)

Avgör vilken av punkterna p och q som ligger i P och bestäm dess B-koordinater.

Lösning: Vi radreducerar $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & p & q \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Härur ser vi att p inte ligger i planet, men att q gör det. Vi ser också att q har B-koordinaterna $[q]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

6. Bestäm en minstakvadratlösning till $Ax = b$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning: Vi får en minstakvadratlösning $\hat{x}$ genom att lösa normalekvationerna $A^T A\hat{x} = A^T b$. Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T b = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Radreduktion ser omständligt ut då siffrorna inte går "jämnt ut", så låt oss använda 2×2-formeln för matrisinvers:

$$\hat{x} = \frac{1}{90-64} \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 104 \\ -104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

7. Matrisen A har en diagonalisering som ges av (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $A^{17}b$ för $b = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T$.

Lösning: Låt diagonaliseringen vara $A = PDP^{-1}$. Då blir $A^{17} = PD^{17}P^{-1}$, så vi behöver bara utföra tre enkla matris-vektor-multiplikationer:

$$
\begin{aligned}
A^{17}b &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

8. Ortonormalisera basen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ för $\mathbb{R}^3$ medelst Gram-Schmidts metod. (3p)

Lösning: Låt de ursprungliga vektorerna betecknas v_1, v_2 och v_3. Gram-Schmidt ger nya ortogonala bas-vektorer b_1, b_2 och b_3 där $b_1 = v_1$,

$$
b_2 = v_2 - \frac{v_2 \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} \quad \text{och} \quad b_3 = v_3 - \frac{v_3 \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} - \frac{v_3 \bullet b_2}{b_2 \bullet b_2}.
$$

Vi får $b_2 = v_2 - \frac{1}{2}b_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $b_3 = v_3 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{3}b_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Räkningarna underlättas lite om vi istället för b_2 tar $2b_2$, och detta spelar ingen roll för det sista normaliserings-steget: en ortonormal bas ges av

$$
\frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

9. Ange standardmatrisen för den linjära avbildning som först roterar en vektor i planet 45° moturs och sedan förlänger den resulterande vektorn med en faktor 2. (3p)

Lösning: Kolonnerna i standardmatrisen är resultatet av transformationen applicerat på enhetsvektorerna $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Roterar vi e_1 45° moturs får vi vektorn $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ och rotationen av e_2 ger $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Efter förlängning med faktorn 2 hamnar $\sqrt{2}$ i täljaren istället för nämnaren. Matrisen blir alltså $\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Antag att $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och att $Ax = 0$ har k st. linjärt oberoende lösningar som alla andra lösningar är linjärt beroende av. Vad är det minsta möjliga värdet på k som låter oss garantera att $Ax = b$ är lösbart för alla b? (3p)

Lösning: Antagandet betyder att $\dim \operatorname{Nul} A = k$. Enligt Rang-satsen är $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$, dvs. $k = n - \dim \operatorname{Col} A$. För att vi skall kunna lösa $Ax = b$ måste $\dim \operatorname{Col} A = m$, så vi måste ha $k = n - m$. För större värden spänner inte $\operatorname{Col} A$ upp hela $\mathbb{R}^m$, så det finns b för vilka $Ax = b$ inte är lösbart. Mindre värden är inte möjliga, då Rang-satsen även säger att $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A$ och $\dim \operatorname{Row} A \leq m$ eftersom $\operatorname{Row} A \subset \mathbb{R}^m$.

11. Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. (5p)

a) Definiera vad som menas med ett underrum av $\mathbb{R}^k$. (2p)

b) Definiera vad som menas med $\operatorname{Nul} A$. (1p)

c) Visa att $\operatorname{Nul} A$ är ett underrum av $\mathbb{R}^k$, för ett visst k. Vilket? (2p)

Lösning:

a) Ett underrum W av $\mathbb{R}^n$ är en delmängd av R^n som uppfyller följande tre krav för godtyckliga $u, v \in W$ och $c \in \mathbb{R}$: $0 \in W$, $u+v \in W$ och $cu \in W$.

b) Med beteckningen $\operatorname{Nul} A$ avses nollrummet till A, dvs. mängden

$$\operatorname{Nul} A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

c) Eftersom $\operatorname{Nul} A$ är en delmängd av $\mathbb{R}^n$ så är $k = n$. Vi har direkt att $A0 = 0$, dvs. $0 \in \operatorname{Nul} A$. Om $u, v \in \operatorname{Nul} A$ så gäller $Au = 0$ och $Av = 0$. Alltså får vi $A(u+v) = Au + Av = 0$ via linearitet av vektoraddition, dvs. $u + v \in \operatorname{Nul} A$. På samma sätt har vi för alla $c \in \mathbb{R}$ att $A(cu) = cAu = c0 = 0$ så att även $cu \in \operatorname{Nul} A$.

12. Låt planet P_1 ges av ekvationen $x+2y+3z = 2$, planet P_2 av ekvationen $3x+4y+5z = 0$ och P_3 av $x + z = 0$. Skärningen mellan P_1 och P_2 är en linje, låt oss kalla den L. (5p)

a) Bestäm L. (2p)

b) Bestäm den ortogonala projektionen av L på P_3. (3p)

Tips för *b*): skriv först P_3 på parametrisk form.

Lösning:

a) Linjen L ges av de punkter som uppfyller ekvationerna för P_1 och P_2 samtidigt. Detta är ett ekvationssystem i 3 variabler och 2 ekvationer. Radreduktion ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

dvs. L ges av punkterna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) En parametrisk form för P_3 ges (t.ex.) av punkterna $sb_1 + tb_2$ där $s, t \in \mathbb{R}$ och

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektorerna b_1 och b_2 utgör en ortogonal bas för P_3 då $b_1 \cdot b_2 = 0$. Därför ges den ortogonala projektionen av en punkt p på P_3 av

$$\operatorname{proj}_{P_3} p = \frac{p \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 + \frac{p \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} b_2.$$

För att få den ortogonala projektionen av L på P_3 så använder vi helt enkelt den formeln på alla punkter i L. Den ortogonala projektionen av L på P_3 ges således av punkterna

$$\frac{-2s+3}{1} b_1 + \frac{0s+4}{2} b_2 = s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

där $s \in \mathbb{R}$.

13. Låt $\mathcal{P}^n$ vara vektorrummet bestående av alla polynom av grad n. Standardbasen $\mathcal{B}_n$ för $\mathcal{P}^n$ ges av de $n+1$ polynomen $b_k(x) = x^k$, $k = 0, \ldots, n$. En annan bas $\mathcal{C}_n$ ges av de så kallade Chebyshev-polynomen c_k. De första fyra är (5p)

$$c_0(x) = 1, \quad c_1(x) = x, \quad c_2(x) = 2x^2 - 1, \quad \text{och} \quad c_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

a) Visa att $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ är linjärt oberoende och att $\mathcal{C}_3$ därmed utgör en bas för $\mathcal{P}^3$. Varför behöver vi inte kontrollera att de spänner upp $\mathcal{P}^3$? (3p)

b) Bestäm basbytesmatrisen $\underset{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{B}_3}{P}$. (2p)

Lösning:

a) Vi antager att $0 = a_0c_0 + \cdots a_3c_3$ för $a_k \in \mathbb{R}$. Eftersom $c_0, \ldots, c_3$ är polynom så betyder 0 här noll-polynomet, dvs. den givna summan måste vara noll överallt. Men

$$\sum_{j=0}^{3} a_j c_j(x) = a_0 - a_2 + (a_1 - 3a_3)x + 2a_2x^2 + 4a_3x^3$$

är ju ett polynom av grad 3 och därmed nollpolynomet. (Eftersom annars skulle det ha max. 3 reella nollställen.) Alltså får vi att $a_0 - a_2 = a_1 - 3a_3 = 2a_2 = 4a_3 = 0$, vilket är ekvivalent med att $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Således är $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ linjärt oberoende.

Eftersom vi vet att dimensionen av $\mathcal{P}^3$ är $3 + 1 = 4$ (och vi har precis fyra vektorer) så behöver vi enligt dimensionssatsen inte kontrollera att de spänner upp $\mathcal{P}^3$ för att se att de utgör en bas för $\mathcal{P}^3$.

b) Basbytesmatrisen $\underset{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{B}_3}{P}$ uppfyller för varje polynom $p \in \mathcal{P}^3$ ekvationen

$$\underset{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{B}_3}{P}[p]_{\mathcal{B}_3} = [p]_{\mathcal{C}_3}.$$

Alltså ges kolonn nr. i av $[b_i]_{\mathcal{C}_3}$. Genom att skriva varje b_k i termer av c_0, c_1, c_2 och c_3 får vi därför direkt att

$$\underset{\mathcal{C}_3 \leftarrow \mathcal{B}_3}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

14. Formulera och bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$. (5p)

Lösning:

Sats: Låt x och y vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då gäller att $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ om och endast om x och y är ortogonala, dvs. $x \cdot y = 0$.

Bevis: Vi har att

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2, \end{aligned}$$

och satsen följer direkt.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Tony Stillfjord
Telefonvakt: Adam Malik, ankn. 5325

TMV166 2017
2017–08–19 kl. 08:30–12:30 (H)
Hjälpmedel: ordlistan från kurshemsidan, ej räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		