TMV166 Linjär algebra för M

Veckoprogram 4: Vektorrum, bas, dimension, rang

Lay: 2.8–2.9, 4.1–4.7. Vektorrum, bas, dimension och rang.

Innehållet i avsnitten 2.8 och 2.9 täcks av kapitel 4, men presenterar begreppen på ett mer konkret sätt. Samtidigt behövs den mer abstrakta synen som ges i kapitel 4. Därför kommer vi att behandla kapitlen samtidigt och i viss mån hoppa fram och tillbaka. (Vi började med detta redan i F9, Vecka 3.) **Även om du koncentrerar dig på 2.8-9 så bör du lösa en stor del av övningsuppgifterna ur kapitel 4**. Centrala begrepp är *underrum, bas för underrum, dimension och rang*, som preciserar en del av det vi mött tidigare. Underrum i $\mathbb{R}^3$ är linjer och plan genom origo, dessa har dimension 1 respektive 2, en bas för linjen består av en vektor som spänner upp linjen. En bas för ett plan består av två vektorer som spänner upp planet. I kapitlet generaliseras detta till högre dimensioner. Även hela $\mathbb{R}^3$ och mängden som bara innehåller nollvektorn är underrum.

Basbegreppet är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer* vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Det är väsentligt att du lär dig bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 13 i 2.8 beskriver hur man gör.

Jag kommer att introducera datorövningen om fackverk på en av föreläsningarna. Denna redovisas i Dugga 2.

I F12 kommer jag att presentera Kap 3, Determinanter. Övningar på detta kommer nästa vecka.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
2.8	PP, 1, 3, ***6***, 7, 9, 15–16, ***17***, 18–20, 23	21, 22	27, 31
2.9	PP, 1, ***5***, 7, 11, 13	15, 17, 18	19–27
4.1	PP, 1, 3, 4	7, 11, 15,***17***, 24	19, 20, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 25, 26	27, 28, 30, 34
4.3	PP, 3, 4, 9, 10, ***13***	11, 15, 21–23, 29, 30	36–38
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11	13, 15, 16, 23–25, 27, 33
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	***8***, 19, 20, 29 (med $V = \mathbb{R}^n$), 33	21, 27, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	7, 9, 13, 15	17, 18, 21, 23, 30, 35

2018–02–01

Datorövningar

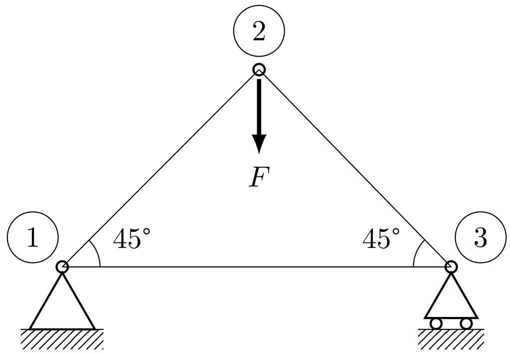
Använd MATLAB flitigt när du gör de vanliga övningsuppgifterna för att kontrollera och jämföra med dina handräkningar.

Följande övning handlar om hur man ställer upp och löser ett (ganska) stort linjärt ekvationssystem från mekaniken. Du får även lära dig hur man använder MATLAB's datastruktur `sparse` för glesa matriser. Du kommer att redovisa denna övning i Dugga 2 i Vecka 5.

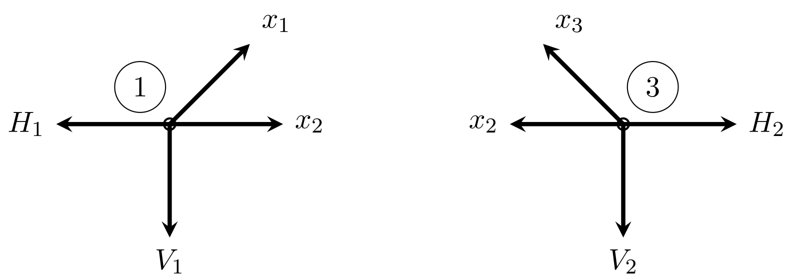
Fackverk

Ett fackverk är en konstruktion där stänger/balkar sätts samman för att ge en lätt men ändå stabil konstruktion. Normalt handlar det om ett tredimensionellt bygge, men för enkelhets skull studerar vi här endast plana fackverk. För att enkelt få stabilitet sätter man samman stängerna så att fackverket består av ett antal trianglar. Punkterna där stängerna sätts samman kallas knutpunkter eller noder.

Det enklaste fackverket består av en enda triangel. Vi skall nu se hur man kan bestämma krafterna i fackverkets stänger då det belastas av en yttre kraft F=8 kN (samma enhet i fortsättningen).



Alla stångkrafter betraktas som dragkrafter. En tryckkraft ses som en negativ dragkraft. Vid friläggning av fackverket kommer alla stångkrafter att verka ut från noden i riktning längs stången, mot den motsatta noden. Stödkrafterna väljer vi här också utåtriktade.



I varje nod måste kraftsumman vara lika med nollvektorn, $\mathbf{0}$.

I nod 1 innebär det att $x_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + H_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + V_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Denna vektorekvation motsvarar två koordinatekvationer:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 - H_1 + 0V_1 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + 0x_2 + 0H_1 - V_1 = 0. \end{cases}$$

I nod 2 får vi ekvationerna

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & & & = & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & - & 8 & = & 0. \end{cases}$$

I nod 3 får vi ekvationerna

$$\begin{cases} -x_2 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & + & H_2 & + & 0V_2 & = & 0 \\ 0x_2 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & + & 0H_2 & - & V_2 & = & 0. \end{cases}$$

Det rörliga stödet i nod 3 innebär att $H_2 = 0$.

Vi har nu totalt sex ekvationer och sex obekanta, x_1, x_2, x_3, H_1, V_1 och V_2:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & - & H_1 & + & 0V_1 & + & 0V_2 & = & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0H_1 & - & V_1 & + & 0V_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & + & 0x_2 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & + & 0H_1 & + & 0V_1 & + & 0V_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 & + & 0x_2 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & + & 0H_1 & + & 0V_1 & + & 0V_2 & = & 8 \\ 0x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & + & 0H_1 & + & 0V_1 & + & 0V_2 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 & + & 0H_1 & + & 0V_1 & - & V_2 & = & 0 \end{cases}$$

Detta systems koefficientmatris är

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

och totalmatrisen blir

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Med `rref` får vi att lösningen blir $x_1 = -5.66$, $x_2 = 4$, $x_3 = -5.66$, $H_1 = 0$, $V_1 = -4$ och $V_2 = -4$. Vi kan också använda `x=inv(A)*b` eller `x=A\b`; det senare är mest effektivt.

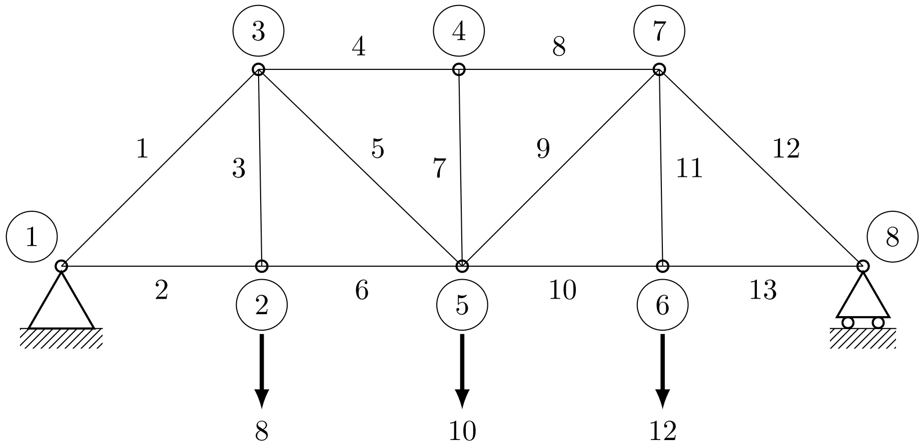
I problem av den här typen kommer koefficientmatrisen alltid att ha många nollor. Det blir då lite trist att skriva in alla dessa. Ett sätt att minska skrivarbetet är att börja med att låta alla element i matrisen vara nollor, `A=zeros(6,6)`, och sedan ändra de element som inte är noll: `A(1,1)= 1/sqrt(2); A(1,2)= 1; A(1,4)= -1;` och så vidare.

Också detta skrivsätt blir trist om matrisen är stor. Då utnyttjar man begreppet gles, sparse matris. Med kommandot `A=sparse(R,K,E,6,6)` där `R, K, E` är radmatriser som innehåller radindex, kolonnindex och element för alla nollskilda positioner i `A` skapas en 6×6-matris med nollor på alla andra platser. I exemplet ovan har `A` 13 nollskilda element. Radmatriserna `R, K, E` skall alltså innehålla 13 element som uppfyller att `E(i)= A(R(i), K(i))`. För att förenkla inleder vi med `u=1/sqrt(2);` så att vi slipper skriva in hela kvoten gång på gång. Sedan tilldelar vi följande:

```
R = [1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6];
K = [1 2 4 1 5 1 3 1 3 2 3 3 6];
E = [u 1 -1 u -1 -u u -u -u -1 -u u -1];
```

Man får emellertid inte se matrisen A om man definierar den med `A=sparse(R,K,E,6,6)` och utelämnar semikolon. Man ser bara en lista över positioner och nollskilda element. Med kommandot `full(A)` får man se matrisen på vanligt sätt och med `spy(A)` får man en grafisk bild av var de nollskilda elementen finns. Detta kan ibland räcka som kontroll att man skrivit rätt. Med träning, systematik och eftertanke kan man ange matriserna `R, K, E` utan att skriva upp hela ekvationssystemet. Varje rad i A svarar ju mot en nod, antingen de horisontella eller de vertikala krafterna i noden. Varje kolonn svarar mot en bestämd stångkraft eller stödkraft.

Uppgift 1. Bestäm stång- och stödkrafter i nedanstående plana fackverk. De horisontella och vertikala stängerna är alla lika långa. □



Facit

Med de angivna krafterna blir `x=[ -19.7990 14.0000 8.0000 -20.0000 8.4853 14.0000 0 -20.0000 5.6569 16.0000 12.0000 -22.6274 16.0000 0 -14.0000 -16.0000]`