TMV166 Linjär algebra för M

Veckoprogram 6: Ortogonalitet

Lay: 6.1–6.6. Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden.

Vi har redan använt begreppen skalärprodukt, längd (norm), ortogonalitet och projektion i samband med vektorer i rummet. Nu ska vi göra samma sak i $\mathbf{R}^n$ och i allmänna vektorrum. Begreppet ortogonal bas kommer att vara viktigt. Vi ska även introducera minstakvadratmetoden.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
6.1	PP, 1, 6, 8, 11, 13, 15	17, 19, 20, 24, 26	34
6.2	PP, 3, 5, 9, 11	17, 21, 23, 24, ***26***, 27	29, 33
6 suppl.		4	
6.3	PP, 1, 3, 5	***8***, 9, 11, 15, 21, 22	23
6.4	PP, 1, 5	3, 9, 17, 18	22, 23
6.5	PP, 3, ***4***, 5, 7, ***8***	9, 13, 17	19, 21
6.6	PP, 1, 4	7, 10, ***11***	14

Datorövning

Kalibrering av materialmodell (konstitutivmodell)

(Med tack till Mikael Enelund som formulerat uppgiften.)

Då matematiken tillämpas i verkligheten görs det genom att man formulerar en matematisk modell som, mer eller mindre bra, beskriver verkligheten. Eller snarare våra observationer av verkligheten. Med en bra modell kan man göra prognoser för hur något kommer att bete sig i en ännu inte observerad situation. I allmänhet innebär den matematiska modellen att man formulerar samband mellan olika storheter. Sambanden kan vara av många olika slag; funktionssamband, differentialekvationer, differensekvationer etc. Det är en stor konst att ställa upp bra samband och inte okontroversiellt vad som är bra. Det vi skall titta på i denna övning är hur en viss modell kan anpassas till aktuella mätdata.

I hållfasthetsläran härör ofta sambanden mellan spänning och töjning från observationer. Utifrån observationerna utvecklas en matematisk modell, kallad materialmodell eller konstitutivmodell, som stämmer överens med de gjorda observationerna.

2018–02–17

Det finns ett stort antal sådana materialmodeller (konstitutiva modeller) för vanliga konstruktionsmaterial, t.ex. Hookes lag eller den elastiska-idealplastiska modellen för stål och flera viskoelastiska modeller, t.ex. Maxwell eller Kelvin, för plaster. Alla modellerna formuleras genom någon ekvation som beskriver samband mellan töjning och spänning. Dessa ekvationer innehåller konstanter eller parameterar som är specifika för ett speciellt material. Parameterarna bestäms ur standardiserade experiment. När parameterarna har bestämts används de i den konstitutiva ekvationen för hållfasthetsberäkningar på strukturnivå.

Metaller vid hög temperatur kryper. Med detta menas att om vi håller spänningen konstant så ökar deformationen (töjningen) med tiden. Detta är en viskoelastisk effekt.

Experiment har visat att spännings-töjningsförhållandet är icke-linjärt. En ofta använd modell för krypning hos metaller vid förhöjd temperatur är Nortons modell (se Grundläggande Hållfashetslära, Hans Lundh):

$$\dot{\epsilon}^c = \frac{1}{\tau}\left|\frac{\sigma}{\sigma_c}\right|^n, \tag{1}$$

där $\dot{\epsilon}^c$ är kryptöjningshastigheten och σ_c är en referensspänning. Tidskonstanten τ och exponenten n är konstanter eller parametrar som bestäms ur experiment. Värdet på τ beror på valet av σ_c, som kan ses som en normeringsfaktor. Att bestämma parametrarna utifrån experiment kallas *kalibrering.*

Uppgift 1. Parametrarna i Nortons modell skall anpassas till experimentella krypdata för koppar vid $T = 250\,°\text{C}$.

i	1	2	3	4	5
σ[MPa]	49.1	75.6	105.1	130.5	150.4
$\dot{\epsilon}^c$[s^{-1}]	1.4×10^{-8}	8.7×10^{-8}	1.7×10^{-6}	3.4×10^{-5}	2.3×10^{-3}

Tabell 1: Experimentella värden på töjningshastigheten för olika spänningsnivåer för koppar vid 250 °C.

Ur tabellen ser vi att vid spänningsnivån $\sigma = 49.1\,\text{MPa}$ är töjningshastigheten $1.4 \times 10^{-8}\,\text{s}^{-1}$, dvs. det tar $t = 0.01/1.4 \times 10^{-8}\,\text{s}^{-1} \approx 7.1 \times 10^5\,\text{s} \approx 200\,\text{h}$ för materialet att krypa (töjas) 1 %. Vi ser även att töjningshastigheten ökar snabbt med spänningsnivån.

Vi börjar med att skriva om Nortons modell (1) med hjälp av logaritmering till

$$\ln\left(\dot{\epsilon}^c\right) = n\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_c}\right) - \ln(\tau). \tag{2}$$

Vi väljer referensspänningen $\sigma_c = 1\,\text{MPa}$. Varje mätpunkt ger då ett linjärt samband för de obekanta n och $\ln(\tau)$.

Vi får således ett linjärt ekvationssystem med två obekanta och fem ekvationer. Skriv detta ekvationssystem på formen $Ax = b$ där $x = \begin{bmatrix} n & \ln(\tau) \end{bmatrix}^T$ och A och b ges av mätdata.

Kontrollera först med `rref` att detta system inte har någon lösning. Bestäm sedan minstakvadratlösningen, dels genom att lösa normalekvationerna $A^TAx = A^Tb$ med hjälp av `rref`, och dels med `x= A\b`.

När parametrarna n och τ har bestämts, rita grafer till sambanden (1) och (2) för intervallet $[49, 150]$MPa. I samma figur skall de experimentellt bestämda punkerna läggas in.

□

Facit

Med angivna data blir $n = 10.020647983658421$ och $\tau = 2.328\,548\,620\,242\,792 \times 10^{25}$.