TMV166 Linjär algebra för M

Veckoprogram 7: Symmetrisk matris

Lay: 7.1–7.2. Symmetriska matriser, diagonalisering, kvadratiska former.

Preliminär version.

I vår sista vecka ska vi studera diagonalisering av reella symmetriska matriser, alltså matriser som uppfyller att $A^T = A$. Spänningsmatrisen $\mathcal{S}$ vars egenvärden och egenvektorer vi studerade tidigare, är alltid symmetrisk. Symmetriska matriser förekommer i många andra sammanhang så resultaten i Kapitel 7.1 är mycket användbara.

I Kapitel 7.2 studerar vi kvadratiska former – funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ som ges av ett andragradspolynom som endast har termer av grad två, t.ex. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$. Sådana funktioner passar in här genom att de kan skrivas $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ med en symmetrisk matris.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
7.1	PP, 1, 4, 5, 7, 11	15, ***17***, 24–26	28, 29, 35
7.2	PP, 1, 3, 5	7	9, 21a–e, 22

Datorövningar

Uppgift 1. Ortogonalisering. MATLAB-funktionen `Q = orth(A)` skapar en ortogonal matris `Q` vars kolonner är en ortonormal bas för kolonnrummet för matrisen `A`. Prova med några matriser, t ex,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Kolla att $Q^T Q = I$. □

Uppgift 2. Ortogonal projektion. Skriv en MATLAB-funktion `P=ortoproj(A)` som skapar matrisen för den ortogonala projektionen på kolonnrummet till matrisen A. Testa med matrisen A i förra uppgiften. Projicera vektorerna

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

□

Uppgift 3. Symmetriskt egenvärdesproblem. MATLAB-funktionen `[V,D]=eig(A)` skapar matriser så att $AV = VD$. V är en ortonormal bas om A är symmetrisk. Testa med symmetriska och osymmetriska matriser A. Kolla om $AV = VD$ och $V^T V = I$. T ex

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Facit

```
function P=ortoproj(A)
Q=orth(A);
P=Q*Q';
```