MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–06–07 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

`/stig`

[Denna sida ska vara blank.]

MATEMATISKA VETENSKAPER **TMV166 2018**
Chalmers tekniska högskola **2018–06–07 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)**
Examinator: Stig Larsson (0733 409006) **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm en ekvation för räta linjen som går genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(4, 5, 6)$. (3p)

2. Bestäm en ekvation för planet som går genom punkterna $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ och $(6, 5, 4)$. (3p)

3. Deriveringsoperatorn $D\colon f \mapsto f'$ avbildar en funktion f på sin derivata f', dvs $(Df)(x) = f'(x)$. Visa att deriveringsoperatorn är en linjär operator. (3p)

4. Beräkna en LU-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. (3p)

5. Skriv en Matlab-funktion `z=ortoproj(y,u,v)` som beräknar den ortogonala projektionen z av vektorn y på det rum som spänns upp av två ortogonala vektorer u och v. (3p)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(A)$. (3p)

7. Med A som i föregående uppgift, beräkna egenvärdena till A. (3p)

8. Bestäm de a för vilka följande kvadratiska form är positivt definit: $x_1^2 + 2ax_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_3^2$. (3p)

9. Vad menas med att en matris U är ortogonal? (3p)

10. I boken anges många villkor som alla är ekvivalenta med att en $n \times n$-matris A är icke-singulär. Skriv ned 3 av dem. (3p)

11. Linjärt ekvationssystem. Låt $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ vara givna. (5p)

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$. (2p)

(b) Bestäm en bas B för $\mathrm{Col}(A)$. (1p)

(c) Bestäm B-koordinaterna för b. (1p)

(d) Bestäm en bas för $\mathrm{Nul}(A)$. (1p)

12. Minstakvadratmetoden. (5p)

(a) Vad menas med en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $Ax = b$? (1p)

(c) Beskriv hur man använder minstakvadratmetoden för att anpassa modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

till givna mätdata: $(x_1, y_1), \dots (x_N, y_N)$. (2p)

(c) Genomför beräkningarna för datapunkterna $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. (2p)

(d) Hur gör man detta i MATLAB? (1p)

13. Diagonalisering. (5p)

(a) Vad menas med att en $n \times n$-matris är diagonaliserbar? (1p)

(b) Visa att matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar. (2p)

(c) Använd diagonaliseringen till att beräkna matrispotensen A^5. (2p)

14. Skalärprodukt. (5p)

(a) Skriv ned villkoren som definierar vad som menas med skalärprodukt i ett allmänt vektorrum. (2p)

(b) Om vi har en skalärprodukt $\langle u, v \rangle$ för $u, v \in V$ så definierar vi normen (längden) av vektorer genom $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Bevisa *parallellogramlagen*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2$$

genom att utveckla kvadraterna: $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. (1p)

(c) Formulera och bevisa Pythagoras sats. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–06–07 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Barbara Schnitzer (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–06–07 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1	$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+3t \\ z = 3+3t \end{cases}$	
2	$x-2y+z=0$	
3	$D(\alpha f+\beta g) = \alpha Df + \beta Dg$ ← deriveringsregler	
4	$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	
5	function z = ortoproj(y, u, v) z = ((y'*u)/(u'*u))*u + +((y'*v)/(v'*v))*v	
6	64	
7	$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_6=2$	
8	$\lvert a\rvert<\sqrt{3}$	
9	$U^TU=I$	
10	$\det(A)\neq 0$ $\mathrm{Col}(A)=\mathbb{R}^n$ $\mathrm{Nul}(A)=\{0\}$ till exempel	

TMV166 2018-06-07

1. $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = [4,5,6]-[1,2,3]=[3,3,3]$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+3t \\ z = 3+3t \end{cases}$$

2. Tangenter: $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = [3,3,3]$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = [6,5,4]-[1,2,3]=[5,3,1]$

Normalvektor: $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [-6, 12, -6] = 6[-1,2,-1]$

Tag $\mathbf{N} = [+1,-2,+1]$

Ekv: $\mathbf{N}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$

$(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = 0$

$x - 2y + z = 0$

3. $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ på matrisform $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}_{=E}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{=U}$

$A = E^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

5. $z = \dfrac{y^T u}{u^T u}\,u + \dfrac{y^T v}{v^T v}\,v$

6. Triangulär matris, $\det(A) = a_{11} \cdots a_{66} = 2^6 = 64$

7. Triangulär matris, $\lambda_j = a_{jj} = 2$ för $j = 1, \dots, 6$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ a & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda) - a^2\big) =$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - a^2) = (3-\lambda)\big((\lambda-2)^2 - 1 - a^2\big) = 0$

$\lambda_1 = 3 > 0$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{1+a^2} > 0$

Måste ha $\sqrt{1+a^2} < 2$, dvs $1+a^2 < 4$, $a^2 < 3$, $|a| < \sqrt{3}$

9. $U^T U = I$

10. $\det(A) \neq 0$, $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Nul}(A) = \{0\}$

11. (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right] (1/3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right] (2)\ (-2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right] (-1)\ (1/2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = t$ fri, $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}t$, $x_1 = -1 - t$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 5/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pivotplatser: 1, 2. Bas för $\mathrm{Col}(A) = \{a_1, a_2\} =$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) $b = Ax = a_1 x_1 + a_2 x_2 \overset{t=0 \text{ t. ex.}}{=} (-1)\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[b]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

(d) Bas för $\mathrm{Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

12. (a) Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Vektorn $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ kallas minstakvadratlösning till $Ax = b$ om

$$|A\hat{x} - b| \leq |Ax - b| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Vi vill bestämma β_0, β_1 så att

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 \\ \vdots \\ y_N = \beta_0 + \beta_1 x_N \end{cases}$$

dvs $$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

eller $X\beta = y$ med $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$

Löses med minstakvadratmetoden. Minsta kvadratlösning $\hat{\beta}$ ges av normalekvationerna

$$X^T X \beta = X^T y$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^N x_j \\ \sum_{j=1}^N x_j & \sum_{j=1}^N x_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N y_j \\ \sum_{j=1}^N x_j y_j \end{bmatrix}$$

(c) Vi har $$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Normalekvationera: $\begin{cases} 3\beta_0 + 2\beta_1 = 6 \\ 2\beta_0 + 6\beta_1 = 7 \end{cases} \iff \beta_0 = \frac{11}{7}, \ \beta_1 = \frac{9}{14}$

(d) Matlab.

```
>> X = [1 -1; 1 1; 1 2], y = [1; 2; 3]
>> beta = X\y
```

13. (a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas diagonaliserbar om det finns en ickesingulär matris P och en diagonal matris D sådana att

$$A = PDP^{-1}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Egenvärdena ges av $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda^2 - 4 = 0, \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = -2: \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = v_2, \quad v = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2: \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = 5 v_2, \quad v = t \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A^5 = (PDP^{-1})^5 = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}DP^{-1})$

$= P D^5 P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{32}{4} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= -8 \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & -80 \\ 16 & -48 \end{bmatrix}$

14. (a) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \quad \forall u,v,w \in V$

$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle \quad \forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v \in V$

$\langle u,u\rangle \geq 0 \;\; \forall u \in V, \;\; \langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

(b) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle =$

$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle +$

$+ \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,-v\rangle}_{=-\langle u,v\rangle} + \underbrace{\langle -v,u\rangle}_{=-\langle v,u\rangle} + \underbrace{\langle -v,-v\rangle}_{=\langle v,v\rangle}$

$= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

(c) Pythagoras sats: $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Bevis: $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle =$

$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$

$= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle =$

$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 =$

$= \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

/Stig