MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Anders Hildeman (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–08–27 kl. 14:00–18:00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Anders Hildeman (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–08–27 kl. 14:00–18:00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm en ekvation för räta linjen som går genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(4, 5, 6)$. (3p)

2. Beräkna arean av triangeln som har hörn i punkterna $(1, 1, 1)$, $(4, 5, 6)$ och $(6, 7, 8)$. (3p)

3. Låt $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$, $p_4(x) = x^3$. Då är $\{p_1, p_2, p_3\}$ en bas för $\mathbb{P}_2$, rummet av alla polynom av grad ≤ 2, och $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en bas för $\mathbb{P}_3$. Integraloperatorn $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definieras av $(Tf)(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$. Bestäm matrisen för operatorn med avseende på de givna baserna. (3p)

4. Beräkna en LU-faktorisering av matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (3p)

5. Vad gör följande Matlab-funktion? (3p)

```
function y=funk(A,x)
U=orth(A);
y=U*U'*x;
```

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(A)$. (3p)

7. Med A som i föregående uppgift, beräkna egenvärdena till A. (3p)

8. För vilka värden på parametern a är vektorerna $\{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende? (3p)

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Formulera triangelolikheten. (3p)

10. Visa att matrisen $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ är ortogonal. (3p)

11. Radreducering. (5p)

(a) Vad menas med nollrummet Nul(A) till en $m \times n$ matris A? (1p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm en *ortogonal bas* för Nul(A). (3p)

(c) Bestäm rank(A). (1p)

12. Minstakvadratmetoden. (5p)

(a) Vad menas med en minstakvadratlösning $\hat{x}$ till ekvationssystemet $Ax = b$? (1p)

(b) Visa att en minstakvadratlösning $\hat{x}$ uppfyller normalekvationerna $A^T Ax = A^T b$. (2p)

(c) Använd minsta kvadratmetoden för att anpassa modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

till datapunkterna (-1,-1), (0,1), (2,3), (3,5). (2p)

13. Diagonalisering. (5p)

(a) Vad menas med att en matris A är diagonaliserbar? (2p)

(b) Använd diagonalisering för att lösa begynnelsvärdesproblemet (3p)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad t > 0; \quad \begin{cases} x_1(0) = 4, \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

14. En $n \times n$ matris A kallas *symmetrisk* om $A^T = A$ och *antisymmetrisk* om $A^T = -A$. (5p)

(a) Visa att alla diagonala element i en antisymmetrisk matris är lika med 0. (1p)

(b) Låt M vara en $n \times n$ matris. Visa att $M + M^T$ är symmetrisk och att $M - M^T$ är antisymmetrisk. Visa att M kan delas upp så att $M = S + T$ där S är symmetrisk och T är antisymmetrisk. (2p)

(c) Visa att $\det(A) = 0$ om A är antisymmetrisk och n är udda. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733 409006)
Telefonvakt: Anders Hildeman (031 772 5325)

TMV166 2018
2018–08–27 kl. 14:00–18:00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV166 Linjär Algebra för M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV166 2018-08-27

1. $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4,5,6) - (1,1,1) = (3,4,5)$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

2. Triangeln spänns upp av vektorerna

$\mathbf{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4,5,6) - (1,1,1) = (3,4,5)$

$\mathbf{b} = P_0P_2 = (6,7,8) - (1,1,1) = (5,6,7)$

Arean är $A = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{24}$$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$

3. Låt operatorn verka på basfunktionerna $\{P_1, P_2, P_3\}$.

$(TP_1)(x) = \int_0^x 1\,dx = x = P_1(x)$

$(TP_2)(x) = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}P_3(x)$, $(TP_3)(x) = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}P_4(x)$

Koordinaterna är

$$[TP_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [TP_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, [TP_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/3} \approx \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ dvs } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}}_{=E} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}}_{=U}$$

$$A = E^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = LU \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

5. y är den ortogonala projektionen av x på kolonnrummet till A.

6. Triangulär matris: $\det(A) = a_{11} \cdots a_{66} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

7. Triangulär matris: $\lambda_1 = a_{11} = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 4$, $\lambda_5 = 5$, $\lambda_6 = 6$

8. $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$ Icke-trivial lösning?

$$\begin{bmatrix} a & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2/a \\ 3/a \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} a & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1-4/a \\ 0 & 6 & 1-6/a \end{bmatrix} (-3) \approx \begin{bmatrix} a & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1-4/a \\ 0 & 0 & 4+6/a \end{bmatrix}$$

Vi måste ha $4 + \frac{6}{a} \neq 0$, dvs $a \neq -\frac{3}{2}$

Alternativ: $\det \begin{bmatrix} a & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = 8a + 12 \neq 0$, $a \neq -3/2$

9. $|u+v| \leq |u| + |v|$

10. $A^T A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

---

11. (a) $Nul(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} (-2) \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} (2) \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (1) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = t$, $x_4 = s$ $\quad x = \begin{bmatrix} -t \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

En bas för $Nul(A) = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Ortogonalisera.

$$b_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1} b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1/4}{9/4} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 4/9 \\ 1/9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ortogonal bas: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/9 \\ 4/9 \\ 1/9 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

eller $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $rank(A) = dim(Col(A))$ = antal pivotelement = = antal bundna variabler = 2

---

12. (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Vektorn $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ kallas minstakvadratlösning till $Ax = b$ om

$$|A\hat{x} - b| \leq |Ax - b| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(b) Antag att $|A\hat{x} - b|$ är minimal.
Då är $A\hat{x} - b$ ortogonal mot $Col(A)$ dvs

$$Ax \cdot (A\hat{x} - b) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow (Ax)^T (A\hat{x} - b) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow x^T A^T (A\hat{x} - b) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow A^T (A\hat{x} - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T A x = A^T b$$

(c)
$$\begin{cases} -1 = \beta_0 - \beta_1 \\ 1 = \beta_0 + 0\cdot\beta_1 \\ 3 = \beta_0 + 2\beta_1 \\ 5 = \beta_0 + 3\beta_1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}, \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 14 & 22 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & 14 \end{array}\right] \qquad \beta_1 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}, \ \beta_0 = \frac{3}{5}$$

---

13. (a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris P och en diagonal matris D så att
$$P^{-1}AP = D$$

(b) Begynnelsevärdesproblemet skrivs
$$x' = Ax, \quad x(0) = b$$
med $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenvärdena till A är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ och motsvarande egenvektorer är $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Lösningen är
$$x(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Begynnelsevillkoret $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = x(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
ger $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow c_1 = 3, \ c_2 = 1$

Lösningen är $\begin{cases} x_1(t) = 3e^{t} + e^{4t} \\ x_2(t) = 3e^{t} - 2e^{4t} \end{cases}$.

---

14 (a) $a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$

(b) $(M+M^T)^T = M^T + (M^T)^T = M^T + M = M + M^T$

$(M-M^T)^T = M^T - M = -(M+M^T)$

Tag $S = \frac{1}{2}(M+M^T)$, $T = \frac{1}{2}(M-M^T)$

(c) $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) =$
$= \underbrace{(-1)^n}_{=-1 \text{ om } n \text{ udda}} \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0.$

/stig