

Lösningssförslag till Tentamen i Matematisk analys D

TMV170, MMGD30, 2015-04-14

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.

Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1.

$$\begin{aligned}y' &= xy^2 \\ y'/y^2 &= x \\ -1/y &= x^2/2 + C \\ y &= -\frac{2}{2C + x^2}\end{aligned}$$

Från $y(0) = 1$ får vi $1 = -2/(2C) \Leftrightarrow C = -1$. Alltså får vi

$$y = \frac{2}{2 - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

2.

$$\begin{aligned}y' + 2\frac{y}{x} &= -\frac{2}{x(1-x^2)} \\ e^{2\ln x}y' + 2e^{2\ln x}\frac{y}{x} &= -\frac{2}{x(1-x^2)}e^{2\ln x} \\ x^2y' + 2xy &= -\frac{2x}{1-x^2} \\ x^2y &= \ln(1-x^2) + C \\ y &= \frac{\ln(1-x^2) + C}{x^2}\end{aligned}$$

Lösningen är giltig för $0 < x < 1$, oavsett C . Från $y(1/2) = 0$ får vi $C = -\ln(3/4) = \ln(4) - \ln(3)$.

3.

$$\begin{aligned}y'' + 4y' + 4y &= 25\sin x \\ r^2 + 4r + 4 &= 0 \\ r &= -2 \\ y_h &= (A + Bx)e^{-2x} \\ y_p &= C\sin(x) + D\cos(x) \\ y'_p &= C\cos(x) - D\sin(x) \\ y''_p &= -C\sin(x) - D\cos(x)\end{aligned}$$

$$y''_p + 4y'_p + 4y_p = (3C - 4D)\sin(x) + (4D + 3C)\cos(x) = 25\sin(x)$$

Lösningen till det lineära ekvationssystemet ges av $C = 3$ och $B = -4$.

$$y = y_h + y_p = (A + Bx)e^{-2x} + 3\sin(x) - 4\cos(x)$$

Från $y(0) = 0$ får vi $A = 4$. Från $y'(0) = 1$ och $A = 4$ får vi $B = 12$.

$$y = (4 + 12x)e^{-2x} + 3\sin(x) - 4\cos(x), x \in \mathbb{R}$$

4. Volymen ges av

$$V = \pi \int_1^{\infty} 2xe^{-x^2} dx = \pi \left[-e^{-x^2} \right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{e}.$$

5. Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ax + b \\ f'(x) &= 2x + a \end{aligned}$$

Tangenten till f i punkten $(c, f(c))$ ges av

$$y = (2c + a)x + c^2 + ac + b - (2c + a)c = (2c + a)x - c^2 + b.$$

Låt $y = x$ vara tangenten i punkten $(c, f(c))$ och $y = -2x$ vara tangenten i punkten $(d, f(d))$. Då vi identifierar koefficienter får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 = (2c + a) \\ 0 = -c^2 + b \\ -2 = (2d + a) \\ 0 = -d^2 + b \end{cases}$$

Subtrahera andra från sista ekvationen för att få $c = \pm d$. Om $c = d$ ger första och tredje ekvationen att $1 = -2$, vilket är falskt, alltså är $c + d = 0$. Addera första och tredje ekvationen för att få $a = -1/2$. Det följer att $c = 3/4$, $d = -3/4$ och $b = 9/16$.

Endast en lösning, $(a, b) = (-1/2, 9/16)$.

6. Vi har

$$\begin{aligned} Q(b) &= \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2 \\ Q'(b) &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - bx_i). \end{aligned}$$

Då $x_i = 0$ för alla i är Q konstant, och alla b är globala minima. Då minst ett $x_i \neq 0$ sätter vi $Q'(b) = 0$ och löser ut b , vilket ger att lokalt extremvärde finns i

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Då Q är kontinuerligt och $Q(b) \rightarrow \infty$ då $b \rightarrow \pm\infty$ så måste det lokala extremvärde vi funnit vara ett globalt minimum.

7. Vi har $F = ma$ (Newton's andra lag), där F är kraften, m är massan och a är accelerationen. Vi låter v vara objektets hastighet ($v' = a$) och får differentialekvationen

$$v' = g/m - kv/m,$$

med lösningen

$$v = \frac{g}{k} + Ce^{-kt/m}.$$

Då vi använder begynnelsevillkoret $v(0) = 0$ får vi

$$v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

8. Approximera $y(4)$ med Eulers metod med steglängd 1, där

$$y(x) = 1 + \int_1^x y(t)(t - y(t))dt.$$

(6 p)

Sätt $x = 1$ för att få ut $y(1) = 1$. Derivera integralekvationen för att få $y' = y(x - y)$. Låt $h = 1$ vara steglängden. Vi får

$$y_{approx}(2) = y(1) + h \cdot y'(1) = 1 + 1 \cdot y(1)(1 - y(1)) = 1$$

$$y_{approx}(3) = y_{approx}(2) + h \cdot y'_{approx}(2) = 1 + 1 \cdot y_{approx}(2)(2 - y_{approx}(2)) = 2$$

$$y_{approx}(4) = y_{approx}(3) + h \cdot y'_{approx}(3) = 2 + 1 \cdot y_{approx}(3)(3 - y_{approx}(3)) = 4$$

Vår (grova) approximation ger alltså $y_{approx}(4) = 4$.