

## Svar till tentamen i Matematisk analys D TMV170

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.

Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1.

$$\begin{aligned}y' &= \cos(x)e^y \Rightarrow \\y'e^{-y} &= \cos(x) \Rightarrow \\ \int y'e^{-y} dx &= \int \cos(x) dx \Rightarrow \\ \int e^{-y} dy &= \int \cos(x) dx \Rightarrow \\ -e^{-y} &= \sin(x) + C\end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret  $y(\pi) = -\ln(2)$  ger nu  $C = -2$ , varefter det är enkelt att lösa ut  $y = -\ln(2 - \sin(x))$ . Denna lösning är giltig för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

2.

$$\begin{aligned}y' + \frac{y}{2x} &= 1 \Rightarrow \\ e^{\int 1/(2x) dx} y' + e^{\int 1/(2x) dx} \frac{y}{2x} &= e^{\int 1/(2x) dx} \Rightarrow \\ \sqrt{x} y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} &= \sqrt{x} \Rightarrow \\ \int \sqrt{x} y' + \frac{y}{2\sqrt{x}} dx &= \int \sqrt{x} dx \Rightarrow \\ \sqrt{x} y &= \frac{2}{3} x^{3/2} + C\end{aligned}$$

Nu ger begynnelsevillkoret  $y(1) = 1$  oss  $C = 1/3$  varefter vi löser ut  $y = \frac{1}{3} \left( 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ , vilket är giltigt endast för  $x > 0$ .

3. Den karakteristiska ekvationen för  $2y'' - 3y' + y = 0$  är  $2r^2 - 3r + 1 = 0$  med lösningarna  $r = 1$  och  $r = 1/2$ . Lösningen till den homogena differentialekvationen blir  $y_H = Ae^x + Be^{x/2}$ . Vi ansätter ett förstgradspolynom som partikulärlösning  $y_P = Cx + D$ , vilket ger

$$y'_P = C \text{ och } y''_P = 0.$$

Insättning i  $2y'' - 3y' + y = x$  ger  $0 - 3C + Cx + D = x$ , alltså  $C = 1$  och  $D = 3$ .

Vi har  $y = Ae^x + Be^{x/2} + x + 3$ , och därmed även  $y' = Ae^x + Be^{x/2}/2 + 1$ . Insättning av begynnelsevillkoret  $y(0) = 1$  ger  $1 = A + B + 3$ . Insättning av begynnelsevillkoret  $y'(0) = 0$  ger  $0 = A + B/2 + 1$ . Ekvationssystemet av  $A = 0$  och  $B = -2$ , varför vi får  $y = x + 3 - 2e^{x/2}$  för alla  $x$ .

4. Vi har

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 1 - 2x^2 + x^3 B_1(x), \text{ och} \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x),\end{aligned}$$

så att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x^3 B_1(x)}{x^2/2 + x^3 B_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x B_1(x)}{1/2 + x B_2(x)} = 4,$$

där  $B_1$  och  $B_2$  är funktioner begränsade inom ett öppet intervall innehållandes 0.

5. Volymen är

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (g(x))^2 - (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (1-x)^2 - (e^x - ex)^2 dx \\ &= \pi \left[ -\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 - \pi \int_0^1 e^{2x} - 2exe^x + e^2 x^2 dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \pi \left[ \frac{e^{2x}}{2} - 2e(xe^x - e^x) + \frac{e^2 x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi e^2}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi e = \frac{\pi}{6} (5 + 12e - 5e^2) \end{aligned}$$

6. Sätt  $z = a + bi$ . Vi får  $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$  och  $\bar{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$ , varför vi är ute efter  $z$  sådana att  $-4ab = 4$ , alltså  $b = -1/a$ , för alla  $a \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . (För full poäng måste man skissa grafen också.)

7. Kalla höjden  $h$  och radien i bottenarean för  $r$ . Höljets area är  $2\pi r^2 + 2\pi hr$ . Materialåtgången är proportionell mot höljets area, alltså proportionell mot  $M = r^2 + hr$ . Detta ger  $h = (M/r) - r$ . Volymen är  $V = \pi hr^2 = \pi Mr - \pi r^3$ . Vi ska nu maximera  $V(r)$ . Vi har  $V'(r) = \pi M - 3\pi r^2$ , så  $V'(r) = 0$  ger  $M = 3r^2$ . Eftersom  $V''(r) = -6\pi r < 0$  för alla  $r > 0$  ser vi att vi maximerat volymen. Vi har alltså  $h = (M/r) - r = 2r$ .

Maximal volym i förhållande till materialåtgång ges då höjden är dubbla radien,  $h = 2r$ .

8. Vi har

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ och } f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Med Newtons metod får vi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k(1+x_k^2)}{1-x_k^2} = \frac{-2x_k^3}{1-x_k^2}.$$

Om vi nu sätter  $x_0 = 1/\sqrt{3+\epsilon_0}$  eller  $x_0 = -1/\sqrt{3+\epsilon_0}$  för något  $\epsilon_0 > 0$  får vi

$$|x_1| = \frac{2}{2+\epsilon_0} |x_0| < |x_0|.$$

Eftersom  $|x_1| < |x_0|$  får vi  $x_1 = 1/\sqrt{3+\epsilon_1}$  eller  $x_1 = -1/\sqrt{3+\epsilon_1}$ , för något  $\epsilon_1 > \epsilon_0$ . Ett upprepande av proceduren ovan ger

$$|x_k| \leq |x_0| \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2}{2+\epsilon_i} \leq |x_0| \left( \frac{2}{2+\epsilon_i} \right)^k,$$

vilket för alla  $\epsilon > 0$  går mot 0 då  $k$  går mot oändligheten. Alltså konvergerar algoritmen.

Observera speciellt att det är otillräckligt att visa att  $|x_0|, |x_1|, \dots$  är en avtagande sekvens, eftersom den i så fall skulle kunna konvergera mot ett positivt värde.