

Lösningar till Tentamen i Matematisk analys D
TMV170, MMGD30, 2015-03-19

Tillåtna hjälpmedel: BETA, inga räknare.

Totalpoäng: 50. Betygsgränser: 20, 30 och 40, resp 20 och 36.

1.

$$\begin{aligned}y' &= (1 + \ln x)(1 + y) \\ \frac{y'}{1 + y} &= 1 + \ln x \\ \ln(1 + y) &= D + x \ln x \\ 1 + y &= e^D e^{x \ln x} \\ y &= -1 + C e^{x \ln x} = C x^x - 1\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}y' &= (1 + \ln x)(1 + y) \\ y' - (1 + \ln x)y &= 1 + \ln x \\ e^{-x \ln x} y' - e^{-x \ln x} (1 + \ln x)y &= e^{-x \ln x} (1 + \ln x) \\ e^{-x \ln x} y &= -e^{-x \ln x} + C \\ y &= -1 + C e^{x \ln x} = C x^x - 1\end{aligned}$$

Från $y(1) = 1$ får vi

$$\begin{aligned}1 &= -1 + C e^0 \\ C &= 2 \\ y &= 2e^{x \ln x} - 1 = 2x^x - 1\end{aligned}$$

Då $\ln x$ ska existera gäller $y = 2e^{x \ln x} - 1 = 2x^x - 1$ endast för $x > 0$.

2.

$$\begin{aligned}3y &= (x - 1)y' + 6x^2 - 2x - 4 \\ y' - 3(x - 1)^{-1}y &= -6x - 4 \\ (x - 1)^{-3}y' - 3(x - 1)^{-4}y &= -(6x + 4)(x - 1)^{-3} = -6(x - 1)^{-2} - 10(x - 1)^{-3} \\ (x - 1)^{-3}y &= 6(x - 1)^{-1} + 5(x - 1)^{-2} + C \\ y &= C(x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 + 5(x - 1)\end{aligned}$$

Från $y(2) = 13$ får vi $13 = C + 6 + 5$ och $C = 2$.

$$y = 2(x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 + 5(x - 1) = (x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$$

I beräkningarna ovan har vi formellt dividerat med $x - 1$, men $x = 1$ är inget problem i vare sig den ursprungliga ekvationen, eller i $y = (x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$, vilket alltså gäller på hela $\mathbb{R}$.

3.

$$\begin{aligned}
 y'' + y &= -2 \sin x \\
 r^2 + 1 &= 0 \\
 r &= \pm i \\
 y_h &= A_c e^{ix} + B_c e^{-ix} = A \sin(x) + B \cos(x) \\
 y_p &= Cx \sin(x) + Dx \cos(x) \\
 y'_p &= C \sin(x) + Cx \cos(x) + D \cos(x) - Dx \sin(x) \\
 y''_p &= 2C \cos(x) - Cx \sin(x) - 2D \sin(x) - Dx \cos(x) \\
 y''_p + y_p &= 2C \cos(x) - 2D \sin(x) = -2 \sin(x) \\
 C &= 0, D = 1 \\
 y &= y_h + y_p = A \sin(x) + B \cos(x) + x \cos(x)
 \end{aligned}$$

Från $y(0) = 0$ får vi $B = 0$. Från $y'(0) = -1$ får vi $-1 = A + 1$.

$$y = -2 \sin(x) + x \cos(x), x \in \mathbb{R}$$

4. Radien hos en skiva blir $e^x - ex$. Arealen av en skiva blir $\pi(e^x - ex)^2 = \pi e^{2x} - 2\pi ex e^x + \pi e^2 x^2$. Volymen blir

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \pi e^{2x} - 2\pi ex e^x + \pi e^2 x^2 dx \\
 &= \frac{\pi}{6} [3e^{2x} - 12e(x-1)e^x + 2e^2 x^3]_{x=0}^1 = \frac{\pi}{6} (5e^2 - 12e - 3).
 \end{aligned}$$

5. Sätt $z = a + bi$. Vi får

$$\begin{aligned}
 |a + (b-1)i| &= a + bi + (a - bi) \\
 \sqrt{a^2 + (b-1)^2} &= 2a \\
 (b-1)^2 &= 3a^2 \text{ (med } a \geq 0) \\
 b &= \pm\sqrt{3}a + 1 \text{ (fortfarande med } a \geq 0)
 \end{aligned}$$

Vi får alltså två strålar från punkten $0+i$, med lutningarna $\sqrt{3}$ respektive $-\sqrt{3}$.

6. Då e^{-x^2} är en jämn funktion med avseende på x och avtagande för $x > 0$ kommer rektangeln att vara centrerad runt 0 i x -led. Av symmetriskäl kan vi nöja oss med att studera fallet $x \geq 0$. Om rektangeln får bredd $2x$ blir höjden e^{-x^2} . Vi får arean $A(x) = 2xe^{-x^2}$ och $A'(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2}$. $A'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/\sqrt{2}$. I det fallet blir arean $\sqrt{2}/e^{1/2}$. För att kontrollera att detta är maximum kan vi observera att inga andra lokala extrempunkter finns, samt att

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2xe^{-x^2} = 0 \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-x^2} = 0.$$

Alternativt observerar vi att $A''(x) = -(12x + 8x^3)e^{-x^2} \leq 0$ då $x \geq 0$, så vårt extremvärde är ett maximum.

7. Variabelsubstitutionen $u = e^t$ ger

$$y = \pi + 2 \int_1^x \frac{y(u)}{u} du.$$

Derivering ger nu

$$y' = 2y/x \Leftrightarrow y'/y = 2/x,$$

samtidigt som vi har $y(1) = \pi$.

$$\ln(y) = 2 \ln(x) + C$$

$$y = Dx^2$$

$$\pi = Dx^2 \Rightarrow D = \pi$$

$$y = \pi x^2$$

Då $\ln x$ ska existera gäller $y = \pi x^2$ endast för $x > 0$.

8. Vi identifierar summan som en Riemannsumma, och skriver om som integral, och får då

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x) dx.$$

Av symmetriskäl (eller genom att partialintegrera) har vi att denna integral är samma som

$$\int_0^1 \cos^2(\pi x) dx.$$

Adderar vi båda integraler får vi uppenbarligen integralen från 0 till 1 av 1, vilket är 1, varför den första integralen måste vara $1/2$.

Alternativt så räknar vi på utan att tänka och får

$$\int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}.$$