1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

I denna uppgift är $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ och $\mathbf{a}_5$ kolonnerna i matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 7 & 1 \\ -2 & -6 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} \text{ är kolonnvektorn } \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Om vi i MATLAB matar in A och $\mathbf{b}$ som A respektive b och sedan gör kommandot

`>> B = rref([A,b]);` så får vi matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Besvara med hjälp av dessa upplysningar följande frågor.

a) Spänner kolonnerna i A upp R^5 ? (1p)
Svar: Nej

b) Är kolonnerna i A linjärt beroende? (1p)
Svar: Ja

c) Är kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ linjärt beroende? (1p)
Svar: Nej

d) Skriv ner samtliga lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (2p)
Svar: $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + s\begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

e) Skriv ner samtliga lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)
Svar: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + t\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + s\begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

f) Ligger $\mathbf{b}$ i Span$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$? (Linjära höljet) (1p)
Svar: Ja

g) Ligger $\mathbf{b}$ i Span$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? (1p)
Svar: Nej

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Beräkna determinanten för matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (5p)

Lösning:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

3. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära transformation som avbildar vektorerna (6p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ på vektorerna } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ resp. } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Undersök om vektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i värdemängden till T.

Lösning:

Avbildningsmatrisen för T är matrisen $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Vi har alltså att $T(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ och att $\mathbf{b}$ tillhör värdemängden för T om och endast om ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent (har lösning).

Totalmatrisen för ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Av detta kan vi dra slutsatsen att $\mathbf{b}$ tillhör värdemängden för T och att om $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ är $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

4. a) Definiera vad som menas med att en matris A är inverterbar. (2p)

   Svar: Se boken kapitel 2.2 ”An $n \times n$-matrix A is said to be invertible ...”

   b) Bevisa att om A och B båda är inverterbara och av samma typ så är också produkten AB inverterbar. (3p)

   Svar: Se boken, kapitel 2.2 sats 6b.

Bonuspoäng: För 7 – 12 p erhålls 1 bonuspoäng, för 13 – 18 p erhålls 2 bonuspoäng, för 19 – 25 erhålls 3 bonuspoäng. Dessa inräknas vid alla tentor tills kursen ges nästa läsår.