MATEMATIK
Chalmers

Träningstenta i Linjär algebra M/TD/Z/V.
Hjälpmedel: Liten ordlista över linjär algebra

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

   a) Vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är egenvektor till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm motsvarande egenvärde. (2p)

   b) Diagonalisera den kvadratiska formen $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ då A är matrisen ovan. (2p)

   c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (2p)

   d) Beräkna B^{-1} då $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2p)

   e) Lös ekvationssystemet $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ då $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ och matlabkommandot (2p)

   `>> G = rref(C)` ger resultatet $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   f) Bestäm en bas för $\mathrm{Col}(C)$ då C är matrisen ovan. (2p)

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Låt A vara matrisen $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix}$ där $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
   $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.
   Bestäm $(\mathrm{Col}(A))^{\perp}$. (6p)

3. a) Bestäm en ON-bas för $W = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ då $\boldsymbol{v}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (4p)

   b) Bestäm projektionen av vektorn $\boldsymbol{u}$ på W då $\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -4 & 6 \end{bmatrix}$. (3p)

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & p & -1 \\ 3 & p & 7 & -1 \\ p & 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

a) För vilka värden på p har ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ parameterlösning? (4p)

b) Lös ekvationssystemet för det tal p för vilket ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har tvåparametrig lösning. (4p)

5. Låt A vara en 4×5-matris, B en 4×2-matris med kolonnerna $\boldsymbol{b}_1$ och $\boldsymbol{b}_2$. (4p)

Låt $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lös matrisekvationen $AX = B$ då man vet att:

$A\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1$ och $A\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b}_2$

samt att $\text{Rank}(A) = \text{Rank}([A\ B]) = 3$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

a) Om A och B är radekvivalenta $m \times n$-matriser och $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ så är också $\text{Col}(B) = \mathbb{R}^m$.

b) Om $AB = I$, där I är en enhetsmatris (identity matrix), så är A inverterbar.

c) Om A är en $n \times n$-matris och $A^2 = I$ så är $\det(A) = 1$

d) Om A är en $m \times n$-matris och $\text{Rank}(A) = m$ så är den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ injektiv (one-to-one).

e) Om A är en $n \times n$-matris och $\text{Rank}(A) = n$ så är 0 inte egenvärde till A.

f) Om A är en $n \times n$-matris så finns det en ortogonal matris P så att $P^T AP$ är en diagonalmatris.

7. Till denna uppgift skall du ge fullständigt svar. Argumentera så väl du kan för alla slutsatser och påståenden.

a) Vad menas med en *linjär avibldning* från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$? (2p)

b) Bevisa att om T är en *linjär avibldning* från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ så finns en matris A så att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ för alla $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$. (3p)

c) Antag att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ för alla $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$ och att $A = PDP^T$ där $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$ är en ortogonal matris och D är en diagonalmatris, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots d_n)$. Vad är $T(\boldsymbol{v}_1)$? (2p)