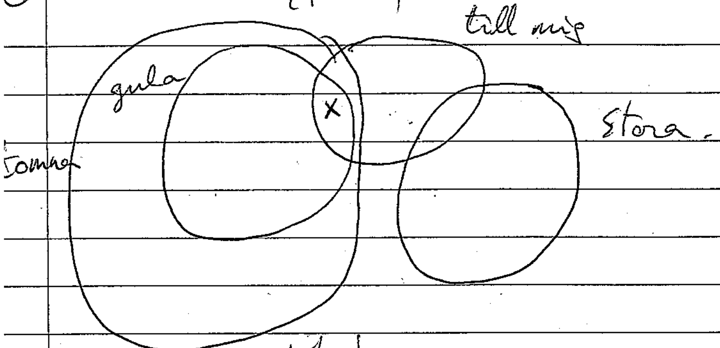
1) Universum = {paket}



Definiera predikat:

- $G(p)$: p är Gult
- $T(p)$: p är tomt
- $S(p)$: p är stort
- $M(p)$: p är till mig

- $\exists p : G(p) \wedge M(p)$
- $\forall p : G(p) \Rightarrow T(p)$
- $\forall p : S(p) \Rightarrow \neg T(p)$

Slutsatser: $\exists p : T(p) \wedge M(p)$: Det finns minst ett tomt paket till mig

$\forall p \; S(p) \Rightarrow \neg G(p)$: inget stort paket är gult

2) $x_n = 2^{2n} - 1$

$x_1 = 2^2 - 1 = 3$

$x_2 = 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$

$x_3 = 2^6 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$

Jag skall visa att: $\forall n \geq 1$, $3 \mid x_n$ med induktion.

* basfall: Påståendet stämmer för $n = 1, 2, 3$, se ovan

* Induktion: antag att $3 \mid x_n$

vi vill visa att $3 \mid x_{n+1}$.

men $x_{n+1} = 2^{2n+2} - 1 = 4x_n + 3$

så $3 \mid x_{n+1}$

visar att om $x_n = 3k$, så är $x_{n+1} = 3 \cdot (4k+1)$ □

Man kan även ge ett direkt bevis:

$x_n = 2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$

vart tredje tal är delbart med 3, så ett av

$(2^n - 1)$, 2^n, $(2^n + 1)$ är delbart med 3.

Men $3 \nmid 2^n$, så $3 \mid (2^n - 1)$ eller $3 \mid (2^n + 1)$

och 3 delar produkten □

3) Vi skall lösa den diofantiska ekvationen

$$42x + 25y = 13$$

dvs hitta alla heltalspar (x,y) som uppfyller ekvationen

Vi börjar med att lösa $42x+25y=1$ med hjälp av den utökade euklidiska algoritmen.

~~Den~~ Euklides algoritm ger:

$$42 = 25 \cdot 1 + 17$$
$$25 = 17 \cdot 1 + 8$$
$$17 = 8 \cdot 2 + 1$$

så vi kan hitta en Bezout relation:

$$1 = 17 - 8 \cdot 2$$
$$= 17 - 2(25-17)$$
$$= 3 \cdot 17 - 2 \cdot 25$$
$$= 3 \cdot (42-25) - 2 \cdot 25$$
$$\boxed{1 = 3 \cdot 42 - 5 \cdot 25}$$

(jag kollar: $3 \cdot 42 = 126$, $5 \cdot 25 = 125$ och därmed $3 \cdot 42 - 5 \cdot \cancel{25} = 1$.)

så en lösning av ekvationen fås genom att multiplicera Bezouts relation med 13:

$$39 \cdot 42 - 65 \cdot 25 = 13$$

de andra fås genom att lägga till $-k \cdot \cancel{25} \cdot 42 + k \cdot 42 \cdot 25$

dvs. lösningsmängden är

$$L = \{(39-25k, -65+42k), k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{(14-25j, -23+42j), j \in \mathbb{Z}\}$$

4) räkna $5^8 - 7^{25}$ i $\mathbb{Z}_{15}$

Vi börjar med 5^8 mod 15

$$5^2 = 25 \equiv 10 \equiv -5 \mod 15$$

så $5^3 \equiv 5 \cdot (-5) \equiv -25 \equiv -10 \equiv 5 \mod 15$

så jämna potenser av 5 är -5 i $\mathbb{Z}_{15}$

och udda potenser av 5 är 5 i $\mathbb{Z}_{15}$.

För att räkna 7^{25} mod 15 kan man använda sig av Eulers sats ty $\text{sgd}(7,15)=1$

Vi har $\varphi(15) = \varphi(3)\,\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$

så $7^8 \equiv 1 \mod 15$, så $7^{24} \equiv 1 \mod 15$

och $7^{25} \equiv 7 \mod 15$

Alternativt kan man räkna att $7^2 = 49 \equiv 4 \mod 15$

$7^4 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1 \mod 15$.

och därmed $7^{25} = 7 \cdot (7^4)^6 \equiv 7 \mod 15$.

så $5^8 - 7^{25} \equiv -5 - 7 \equiv -12 \equiv 3 \mod 15$

5) Bevis för: $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

- ett kombinatorisk bevis:

  $\binom{n}{k}$ är antalet delmängder av $\{1, \ldots, n\}$ med k element, så $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ är antalet delmängde i $\{1, \ldots, n\}$ med mellan 0 och n element, dvs. antalet delmängder överhuvudtaget (inkl. $\{1, \ldots, n\}$ själv, och $\emptyset$) och det finn 2^n ~~delmängder~~ mängder.

- Man kan använda binomialsatsen och se att.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

- Ett induktionsbevis:

  × För $n=1$, $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = 1 + 1 = 2$

  × Antag att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

  vi vill visa att $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$

  Vi har rekursionsrelationen: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ för $k>0$

$$\text{så} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k}$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underset{\text{(induktionsantagande)}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \square$$

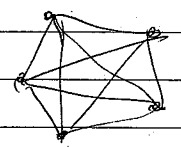
6) På samma sätt som att det inte kan finnas två primtal i rad större än (2,3) ty vartannat tal är jämnt, så kan det inte finnas några fler primtalstrippler eftersom vart tredje tal är delbart med 3. Av fem tal i rad: $k-2, k-1, k, k+1, k+2$, så är antingen k delbart med 3, eller så är två av de andra talen delbara med 3 (ett jämnt, ett udda), däribland $k-2$ eller $k+2$. I alla fall är ett av $(k-2, k, k+2)$ delbart med 3.

7a) Fotbollsmästerskap

5 lag, alla möter varandra en gång

$\rightsquigarrow$ Fullständig graf med 5 noder

varje nod föreställer ett lag, varje kant en match



antal matcher i mästerskapet

= antal kanter i grafen

$= \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

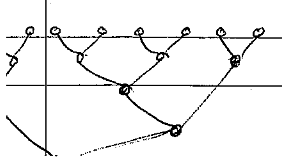
För n lag, rita K_n, med n noder,

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ kanter:

varje lag spelar n-1 matcher.

b) En tennisturnering där förloraren till varje match åker ut kan representeras med ett (binärt) träd där löven (dvs noder av gradtal 1) representerar deltagare, och de inre noderna (som har gradtal 2) representerar matcherna (och matchens vinnare). Kanterna visar vilka 2 spelare spelar matchen.

Alla utom en av spelarna skall ut förr eller senare, så man spelar 52 matcher för 53 deltagare, n-1 matcher för n deltagare, och trädet har n löv, n-1 ~~inre~~ matchnoder, dvs 2n-1 noder och därmed 2n-2 kanter.



Om n inte är en 2-potens får man ett udda antal noder vid vissa nivåer. Dessa kan samanföras till trädet vid nästa nivå (eller längre ner).

8) De första Fibonaccitalen:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, .

- Om F_n och F_{n+1} har en gemensam delare större än 1, så delar denna även $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ och $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, och därmed alla talen i följden. Eftersom de första har gemensam delare bara 1, kan inte detta inträffa.

- Man kan titta på Fibonaccföljden modulo 2:
$\overline{F}_1 = 1 \quad \overline{F}_2 = 1 \quad \overline{F}_n = \overline{F}_{n-1} + \overline{F}_{n-2}$ i $\mathbb{Z}_2$.
1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, ... : periodisk
Summan av två udda tal är jämn, summan av ett udda och ett jämnt är udda. Därmed är vart tredje Fibonaccital jämnt (F_{3k}, $k \in \mathbb{N}$)

- Tittar man på följden modulo 3 får man följande periodisk följd
$1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, \underbrace{1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0}, \ldots$
Så vart fjärde tal är delbart med 3 (och resterna modulo 3 läses på följden ovan): F_{4k}, $k \in \mathbb{N}$.

- (Modulo 4: 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, ... : $4 \mid F_{6k}$, $k \in \mathbb{N}$)

- modulo 5:
$\underbrace{1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0}_{\text{period.}}, 1, 1$
Vart 5e tal är delbart med 5: F_{5k}, $k \in \mathbb{N}$.