Matematik – Chalmers

Tentamen i Diskret Matematik – IT, TMV200, HT06
21 december 2006, kl. 8.30–12.30

hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Oscar Marmon, tel. 0762-721860

Förklara i detalj hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte bara för svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Betrakta mängden av alla paket som ligger under julgranen. Skriv följande utsagor på symbolisk logisk form och illustrera dem med hjälp av Venn diagram.

   - Minst ett gult paket är till mig.
   - Alla gula paket är tomma.
   - Inget stort paket är tomt.

   Vad kan du dra för slutsatser? (6p)

2. Låt $x_n = 2^{2n} - 1$. Räkna ut x_1, x_2, x_3 och ställ upp en hypotes om delbarhet av x_n.

   Bevisa din hypotes. (6p)

3. Lös följande diofantiska ekvation: $42x + 25y = 13$. Ange alla lösningar. (6p)

4. Beräkna $5^8 - 7^{25}$ modulo 15. (6p)

5. Ge minst två olika bevis för formeln $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (7p)

6. Paren (29, 31), (41, 43), och (227, 229) är exempel på primtalstvillingar, dvs. par av primtal med bara ett (jämnt) tal emellan. Många matematiker förmodar att det finns oändligt många primtalstvillingar.

   Man kan kalla (3, 5, 7) för en primtalstrippel, dvs. tre primtal med bara två (jämna) tal emellan. Finns det några fler primtalstrippler? Ange några eller/och bevisa att det inte finns fler. (6p)

7. Illustrera med en graf (och förklara ditt val av illustration):

   a) En fotbollsmästerskap där varje lag möter alla andra en gång.

   Hur många matcher spelas om man har 5 lag? Om man har n lag?

   b) En tennisturnering där förloraren till varje match åker ut.

   Hur många matcher spelas om man börjar med 53 deltagare? Med n deltagare? (6p)

8. Fibonacciföljden definieras av $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ och $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 3$. Visa att två efterföljande Fibonaccital är relativt prima.

   Vilka Fibonaccital är jämna? Vilka är delbara med 3? Vilka är delbara med 5? (7p)

/Laura Fainsilber