MATEMATIK, CHALMERS

Omtentamen Diskret Matematik – IT, TMV200, HT09, Laura Fainsilber den 10 april 2010

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: David Witt-Nyström, tel.0703-088304

Förklara i detalj hur du resonerar och räknar.
Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Visa med induktion att det för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller att (6p)

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

Ange induduktionsbevisets struktur tydligt och förklara vad du gör.

2. Hur många av heltalen $1, 2, 3, \cdots, 500$ är relativt prima med 500?

Hur många är relativt prima med 42, (dvs. sådana att SGD$(n, 42) = 1$)? (6p)

3. Vilken rest erhålls då 207^{61} delas med 13?

Ange tre exempel till på tal a och b, $a > 100$ och $b > 50$, sådana att resten vid division av a^b med 13 ger samma resultat som ovan. Förklara hur du vet det. (6p)

4. Clinton bor på en ö i Karibien. Varje lördag går han ner till hamnen och hämtar sin post. Båten med post och tidning kommer var femte dag och kommer nästa gång på fredag. Det är tisdag idag. Om hur många dagar blir nästa tillfället då Clinton, när han går ner och hämtar sin post, får en dagsfärsk tidning? Hur ofta händer det? (6p)

5. För varje mängd nedan, ange en induktiv definition. (6p)

   (a) Mängden av alla naturliga tal delbara med 5.

   (b) Mängden av alla naturliga tal kongruenta med 3 modulo 13.

   (c) $M = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x \geq y\}$

6. Vad innebär det att en funktion är injektiv? Surjektiv? Uttryck definitionerna först i ord, sedan med hjälp av predikatlogik (dvs enbart med variabler, kvantorer och predikat). (7p)

7. Kan du rita den fullständiga grafen med 5 noder K_5 utan att lyfta pennan och utan att gå på samma kant flera gånger? Förklara hur du gör eller varför det inte går.

För vilka naturliga tal n har grafen K_n en Eulercykel? Om en fullständig graf inte har någon Eulercykel, kan man ta bort några kanter och få en graf med Eulercykel? Hur många kanter i så fall? (7p)

8. Låt X vara en mängd, och betrakta följande relation på potensmängden $P(X)$: En delmängd S är i relation med en delmängd R om och endast om det finns en bijektion från S till R. Är detta en ekvivalensrelation? Beskriv i så fall ekvivalensklasserna. Är det en partiell ordning? Ange i så fall minsta, största, minimala och maximala element.

(6p)

Lycka till!