MATEMATIK, CHALMERS

Omtentamen Diskret Matematik – IT, TMV200, HT10, Laura Fainsilber den 29 april 2011

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Oscar Hamlet, tel.0703-088304
Förklara i detalj hur du resonerar och räknar.
Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Vi har 2n studenter i en klass, som skall jobba 2 och 2. På hur många sätt kan man göra indelningen? Kan du uttrycka resultatet med hjälp av fakultet och potenser? (6p)

2. Visa med induktion att ett träd med n noder har $n-1$ kanter. (6p)

3. Beräkna $7^8 - 5^{25} \mod 21$ (6p)

4. Ge tre exempel på kombinatoriska frågor med svar 56, med lösningar. Beräkningarna för de olika exempel skall vara olika. Poäng ges för korrekthet och kvalite! (7p)

5. Här kommer 8 påstående. Ange “Sant” eller “Falskt” för högst 6 av dem. Du får +1p för varje rätt svar, -1p för varje felaktigt svar. Är du osäker kan det vara bättre att svara på färre än 6 än att riskera att ge ett felaktig svar. Du behöver inte förklara sitt svar. Totalpoäng på uppgiften blir mellan 0 och 6. Universum är $\mathbf{R}$, mängden av alla reella tal.

   (a) $\forall x,\ \forall y:\ (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (y > x \vee y = x)$
   (b) $\forall x,\ \forall y:\ (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (xy > 0)$
   (c) $\forall x,\ \forall y:\ (x > 0 \wedge y > x) \Rightarrow (xy \geq x)$
   (d) $\forall x,\ \forall y:\ (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (\exists z : xy > z \wedge z > 0)$
   (e) $\forall x,\ \exists y:\ (xy > x)$
   (f) $\exists x,\ \forall y:\ (xy > x)$
   (g) $\forall x,\ \forall y:\ (x > 0 \wedge y < 0) \Rightarrow (\exists z : xz = y)$
   (h) $\forall x,\ \exists z:\ (x > 0) \Rightarrow (\forall y : xz = y)$

6. Låt A vara en mängd med n element. Hur många delmängder har mängden A? (7p)
   Bevisa ditt påstående dels med ett induktionsbevis, dels med ett annant bevis.

7. Påskharen hade en stor påse med choklad och fyllde 9 påskägg för 9 barn, med lika många choklad i varje ägg. Då hade han 1 chokladbit kvar. Men det kommer två barn till, och påskharen skall omfördela sina choklad. För 11 påskägg får han 10 choklad kvar. Hur många chokladbitar kan varje barn få? Hur många kan kaninen har haft från början? (6p)

8. Paren (29, 31), (41, 43), och (227, 229) är exempel på primtalstvillingar, dvs. par av primtal med bara ett (jämnt) tal emellan. Många matematiker förmodar att det finns oändligt många primtalstvillingar.

   Man kan kalla (3, 5, 7) för primtalstrillingar, dvs. tre primtal av formen $(p, p+2, p+4)$. Finns det några fler primtalstrillingar? Ange några eller bevisa att det inte finns fler.

   (6p)

Lycka till!

Laura