Något om kombinatorik

1. Inledning

Kombinatoriken är den gren av matematiken som försöker undersöka på hur många olika sätt något kan utföras. Det kan vara fråga om mycket olika slag av problem. Kombinatoriska problem kan ibland vara mycket komplicerade. Ofta är det svårt att avgöra om problemet är enkelt eller svårt. En svårighet är att man ofta först måste analysera själva problemet innan man kan börja räkna. Detta bygger mycket på förtrogenhet med problemställningarna och ett stort mått av övning. Det gäller ofta att analysera problemet i termer av sådana problem man känner lösningen på och sedan formulera en strategi för att tackla problemet utifrån detta. Här gäller det förstås att vara påhittig och det är svårt att lära ut hur man är det. En annan svårighet med kombinatoriska problem är att det ofta är svårt att känna på sig om svaret är rimligt eller inte. Ur praktisk synvinkel är detta speciellt viktigt när det finns ett mycket stort antal möjligheter att genomföra något. Det kan vara väsentligt att förstå om det finns 100 miljoner möjligheter eller bara 100.000, men intuitivt är det svårt att förstå skillnaden.

Vi ska analysera fyra typer av standardproblem som förekommer inom kombinatoriken. Med kombination av dessa och en ibland finurlig analys, kan man komma åt en del problem.

Vi tänker oss att vi ska välja k element ur en mängd med n element. För enkelhets skull kan vi tänka oss att elementen är kulor i en urna numrerade med talen $1, 2, \dots, n$. Vid denna process kan vi göra valet *med eller utan återläggning*. Vid återläggning lägger man tillbaka den kula man just dragit så att den kan förekomma flera gånger. I det andra fallet kan varje kula bara dras en gång. Vid dragning i ett bingolotteri är det fråga om val utan återläggning, vid dragning av en siffra i taget i ett numerlotteri är det fråga om val med återläggning.

Vid valet av k kulor bland n givna kan ordningen som kulorna dras på vara oväsentlig eller mycket viktig. I dragning till ett bingolotteri är ordningen oväsentlig medan den förstås är viktig i dragningen till ett nummerlotteri. Man skiljer på val *med eller utan hänsyn till ordning.*

Kombination av de två typerna ger fyra kombinatoriska problem som vi ska analysera: val med/utan återläggning och med/utan hänsyn till ordningen. Det är inte ofta man kan lösa kombinatioriska problem i vardagen med dessa typer, men man kan ofta komma på en strategi för lösning av problemet så att en kombination av de fyra typerna leder till en lösning.

2. Val med återläggning och hänsyn till ordningen

Ett typexempel är antalet tipsrader som är möjliga. Vi ska välja mellan symbolerna 1, $\times$, och 2 tretton gånger. Vid varje tillfälle har vi tre val. *Multiplikationsprincipen* ger att svaret är 3^{13} eller ungefär 1.6 miljoner olika rader.

Mer generellt ger multiplikationsprincipen att det finns n^k olika möjligheter att välja k element bland n givna med återläggning och med hänsyn till ordning.

Exempel 1 Hur många delmängder finns det till en mängd med n element?

En lämplig strategi är att låta elementen i mängden avgöra om de ska vara med i delmängden eller inte genom att rösta ja eller nej. Det betyder att vi, i tur och ordning, ska välja mellan två objekt, "ja" eller "nej", n gånger. Svaret blir därför 2^n.

Exempel 2 Tio personer tävlar i tre olika grenar. På hur många olika sätt kan förstaprisen delas ut om den som vunnit två grenar inte får ställa upp i den tredje?

Vi tänker oss att förstaprisen väljer sin pristagare (i tur och ordning). Vi bortser, till att börja med, från inskränkningen att den som vunnit två grenar inte får ställa upp i den avslutande. Vi har då 10^3 olika möjliga utfall. De som inte är giltiga under de givna förutsättningarna är 10 stycken, dvs de där samtliga förstapris tas av en och samma person. Svaret blir 990.

3. Val utan återläggning men med hänsyn till ordning.

Ett typexempel här är antalet möjliga staplar bestående av fyra klotsar som kan byggas med sju olikfärgade byggklotsar. Understa klotsen kan väljas på 7 sätt. Nästa klots kan, oberoende av första valet, väljas på 6 sätt, osv.

Multiplikationsprincipen ger att svaret är $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Mer generellt ger multiplikationsprincipen att det finns $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$ sätt att välja k element ur n givna utan återläggning men med hänsyn till ordning.

Om speciellt $n = k$ har vi att det finns $n!$ sätt att ordna n givna objekt. En sådan ordning kallas en *permutation* av objekten.

Exempel 1 Hur många "ord" kan bildas av bokstäverna i ordet "ankfot"?

Ord av "längd" 1 är 6 till antalet, eftersom det finns 6 olika bokstäver att välja mellan. Antalet ord av längd 2 är $6 \cdot 5$ enligt multiplikationsprincipen, etc. Svaret blir

$$6+6\cdot5+6\cdot5\cdot4+6\cdot5\cdot4\cdot3+6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2+6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = \sum_{k=1}^{6} 6!/(6-k)! = 1956.$$

Övning 1 Om orden av längd 6 skrivs i bokstavsordning, vilket kommer då på plats 711?

Exempel 2 I besättningen på en fyra med styrman (en roddbåt) har bara två rätt att vara styrman. På hur många sätt kan båten bemannas?

Vi väljer först en av de två möjliga styrmännen. Detta kan ske på 2 sätt. De återstående fyra platserna kan besättas på 4! olika sätt. Multiplikationsprincipen ger att svaret är $2 \cdot 4! = 48$.

4. Val utan återläggning och utan hänsyn till ordning

Ett typexempel på detta är hur många godispåsar med tio karameller man kan komponera om man har trettio (olika) karameller att välja mellan. Om x betecknar detta antal har vi att $x \cdot 10! = 30!/(30-10)!$. Högra ledet beräknar antalet sätt att välja ut 10 karameller i ordning, dvs antalet sätt att äta upp tio karameller (en i sänder!) givet trettio olika. Processen kan genomföras så att man först stoppar tio karameller i en påse, vilket kan göras på x sätt, och därefter inmundigar innehållet. Detta kan göras på 10! olika sätt. Multiplikationsprincipen ger nu likheten $x \cdot 10! = 30!/(30-10)!$. Vi får alltså $x = 30!/(10!(30-10)!) = 30045015$. Drygt trettio miljoner möjligheter.

Allmänt använder man beteckningen $\binom{n}{k}$ för antalet sätt att välja en delmängd med k element ur en mängd med n element. Eftersom det är fråga om del*mängd* spelar ordningen ingen roll. Vi har generellt att $\binom{n}{k} \cdot k! = n!/(n-k)!$

eller

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Uttrycken $\binom{n}{k}$ kallas binomialkoefficienter eftersom de dyker upp i utvecklingen av det binomiska uttrycket $(x+y)^n$.

Exempel 1 Hur många olika ord kan bildas om samtliga bokstäver i ordet "PARALLELL" ska användas?

Vi tänker oss att vi har nio tomma platser uppradade från vänster till höger som ska fyllas med bokstäverna. Vi väljer ut fyra platser och placerar ut de fyra L:en ($\binom{9}{4}$ möjligheter). Vi väljer sedan två platser bland de återstående fem och placerar ut de två A:na ($\binom{5}{2}$ möjligheter). Därefter placerar vi ut de återstående tre bokstäverna på de kvarvarande tre platserna (3! möjligheter). Multiplikationspsrincipen ger att svaret är

$$\binom{9}{4}\binom{5}{2}3! = 7560.$$

Alternativt, och enklare, kan man först betrakta de två A:na och fyra L:en som olika, genom att t.ex. sätta index på dem: A_1, A_2, L_1, L_2, L_3, L_4. Antalet ord är nu 9!. Efter strykning av index kommer det alltid vara 2!4! (= antalet sätt att ordna A:na och L:en) som ger samma ord utan index. Detta ger svaret $9!/(2!4!)$.

Exempel 2 Vid dragning av fem kort ur en kortlek, vad är sannolikheten att få precis tre ruter? (Om alla utfall är lika sannolika (jämn sannolikhetsfördelning) definieras sannolikheten som antalet gynnsamma utfall dividerat med antalet möjliga.)

Om vi tänker oss att vi drar korten i tur och ordning, placerar dem från vänster till höger och skiljer på kortens valörer blir alla utfall lika sannolika. Antalet möjliga dragningar blir $52!/(52-5)!$. För att beräkna antalet gynnsamma utfall väljer vi först tre platser bland fem ($\binom{5}{3}$ möjligheter) och placerar ruterkort där ($13 \cdot 12 \cdot 11$ möjligheter). På de återstående två platserna placerar vi kort av annan färg ($39 \cdot 38$ möjligheter). Antalet gynnsamma utfall är $\binom{5}{3} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 39 \cdot 38$. Svaret är

$$\frac{10 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 39 \cdot 38}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{2717}{33320} \simeq 0{,}082.$$

Vad är sannolikheten för samma händelse om man tillåter återläggning av kort? De gynnsamma fallen är nu $\binom{5}{3}13^3 39^2 = 10 \cdot 13^5 3^2$, medan de möjliga utfallen är $52^5 = 4^5 13^5$. Svaret blir alltså $45/2^9 \simeq 0{,}088$.

Man kan också lösa (det första) problemet genom att konstatera att antalet möjliga utfall är $\binom{52}{5}$. De gynnsamma är $\binom{13}{3}$ (val av tre ruter) multiplicerat med $\binom{39}{2}$, vilket ger $\binom{13}{3}\binom{39}{2}/\binom{52}{5}$.

Exempel 3 På hur många sätt kan en skolklass bestående av $3n$ elever delas in i grupper om tre?

Vi tänker oss först att grupperna numreras med 1 upp till n och att varje grupp i tur och ordning väljer sina medlemmar. Vi låter y beteckna antalet möjligheter att göra detta. Detta kommer inte att ge rätt svar eftersom det i uppgiften inte förutsätts någon "etikettering" av grupperna. Om det sökta antalet är x kommer vi att ha $n! \cdot x = y$, eftersom det finns $n!$ olika sätt att fördela etiketterna $1, 2, \ldots, n$ på n grupper. Vi beräknar y. Den första gruppen kan väljas på $\binom{3n}{3}$ sätt. Den andra gruppen kan sedan välja på $\binom{3n-3}{3} = \binom{3(n-1)}{3}$ olika sätt. Den tredje gruppen kan välja på $\binom{3(n-2)}{3}$ sätt, etc. Vi får enligt multiplikationsprincipen

$$n! \cdot x = y = \binom{3n}{3}\binom{3(n-1)}{3}\binom{3(n-2)}{3}\cdots\binom{3}{3} = (3n)!/(3!)^n.$$

Svaret är alltså $x = (3n)!/(n!(3!)^n)$. Om 12 elever ska delas i grupper om 3 är således antalet möjligheter $12!/(4!6^4) = 15400$.

Ett alternativt sätt att bestämma y är att först rada upp eleverna i en rad och sedan bestämma att de tre första bildar första gruppen det tre följande den andra gruppen etc. Antalet sätt att rada upp eleverna är $(3n)!$, så antalet sätt att dela in eleverna i grupper om tre där varje medlem har ett nummer $1-3$ är $y(3!)^n = (3n)!$. Detta ger $y = (3n)!/(3!)^n$.

5. Val med återläggning men utan hänsyn till ordning.

Ett typiskt exempel på detta är antalet valresultat som kan förekomma när 75 personer röstar på en av fyra kandidater A, B, C och D. Ett sätt att tänka sig problemet är att sätta sig in i valsammanräknarens situation när han öppnar urnan för att räkna ut valresultatet. Det första han gör är (lämpligen) att sortera röstsedlarna i fyra högar, en för A, en för B, en för C och en för D. Lite mer orealistiskt, men strategiskt vettigt, är det att tänka sig att han sedan lägger ut dem i en lång rad (med 75 platser). Man kan tänka sig att man drar ett streck mellan A's, B's, C's och D's sedlar och att dessa streck upptar 3 platser. Totalt har vi nu 78 platser där 3 streck ska placeras in. De platser som kommer före första strecket upptas av A's valsedlar, de som kommer mellan första och andra strecken upptas av B's, etc. De möjliga valresultaten blir antalet sätt att placera in $3 = 4-1$ streck på $75+(4-1)$ platser, dvs att välja $4-1$ objekt bland $75+(4-1)$ givna. Detta antal är $\binom{75+(4-1)}{4-1} = 67525$.

Generellt har vi att antalet sätt att välja k objekt bland n givna med återläggning och utan hänsyn till ordningen ges av

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Metoden att sätta "streck i räkningen" är ett standardtrick i kombinatorik.

Exempel 1 Hur många olika kast kan göras med fyra tärningar? (Man bortser från vilken tärning som visar de olika valörerna.)

Här är det fråga om att göra fyra val (av 1 till 6) med återläggning och där ordningen är oväsentlig. Svaret blir alltså $\binom{6+4-1}{4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/4! = 126$.

Exempel 2 Man väljer på måfå ut sju kulor ur en burk med ett stort antal blå, gula, gröna och röda kulor och stoppar dem i en påse. På hur många sätt kan detta göras?

Här är det fråga om att välja sju objekt bland fyra givna med återläggning och utan hänsyn till ordning. Svaret blir $\binom{4+7-1}{7} = 10 \cdot 9 \cdot 8/3! = 120$ olika sätt.

Exempel 3 Hur många positiva heltalslösningar har ekvationen $x+y+z = 91$, där $x \geq 13$ och $y \geq 10$?

Vi tänker oss 91 ägg som ska fördelas på 3 korgar. Antalet ägg i första korgen är x antalet ägg i andra korgen är y och antalet ägg i den tredje korgen är z. Vi lägger 13 ägg i första korgen 10 i den andra och 1 i den tredje. Det återstår att fördela 67 ägg i de tre korgarna. Vi radar upp de 67 äggen och placerar in två streck. De som hamnar före första strecket placeras i första korgen, de som hamnar mellan de båda strecken placeras i andra korgen och de som hamnar efter tredje strecket placeras i tredje korgen. Vi ska alltså beräkna antalet sätt att placera ut två streck i raden av 67 ägg. Vi ska välja två platser bland $67+2$ så svaret blir $\binom{69}{2} = 2346$.

Om man allmänt söker antalet icke-negativa heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

så blir svaret (med samma resonemang som i förra exemplet) antalet sätt att placera in $k-1$ streck på $n+k-1$ platser dvs $\binom{n+k-1}{k-1}$.

6. Några exempel.

I praktiken är det sällan fråga om att direkt tillämpa något av de fyra standardresultaten ovan. Oftast får man hitta på en strategi för att lösa problemet genom att dela upp i olika fall och tillämpa kombinationer av de fyra metoderna. I val av strategier kan man vara mer eller mindre finurlig. Rätt angreppssätt kan leda till verkligt enkla lösningar medan andra kan ge rätt resultat först efter stor möda.

Exempel 1 Hur många olika sjusiffriga tal kan skrivas med användning av siffrorna 0, 4, 4, 5, 5, 5, 6?

En möjlig strategi är att tänka sig att sju platser i rad ska fyllas med siffrorna. Det kan vara lämpligt att först placera ut 0. Eftersom talet inte får börja med 0 finns det sex sätt att placera ut denna siffra. Därefter placerar vi ut 5:orna på de tre av de återstående sex platserna. Det finns $\binom{6}{3}$ sätt att välja ut tre platser bland sex utan hänsyn till ordning. Därefter placerar vi ut de två 4:orna på de återstående tre platserna. Detta kan göras på $\binom{3}{2}$ olika sätt. Till sist placerar vi ut 6:an på den enda återstående platsen. Multiplikationsprincipen ger resultatet $6 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 = 6 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 1 = 360$.

Nedan följer två exempel på “streck i räkningen”.

Exempel 2 Genom att hissa vimplar (under varandra) i masterna på en tremastad båt kan man sända meddelande till andra sjöfarande. Hur många olika meddelanden kan sändas om man har tretton vimplar, var och en av olika slag, att tillgå? (Olika ordning på vimplarna på en mast anses ge olika meddelanden.) En möjlig strategi här är att tänka sig att man radar upp vimplarna i masterna på marken från höger till vänster och låter två streck markera övergång från masterna från för till akter. Eftersom inget sägs om hur många vimplar som ska användas måste vi utgå från att detta tal, låt oss kalla det k, kan variera mellan noll och tretton. Fixerar vi k finns det $k+2$ platser att fylla, dels med k vimplar och dels med två streck. Vi placerar först ut strecken genom att välja två platser bland $k+2$ utan hänsyn till ordning. Detta kan göras på $\binom{k+2}{2}$ sätt. Därefter placerar vi ut k av de 13 vimplarna på de återstående k platserna. Detta kan göras på $13!/(13-k)!$ sätt. Totalt kan man sända $\binom{k+2}{2}13!/(13-k)! = (k+2)!\binom{13}{k}/2$ olika meddelanden som använder precis k stycken vimplar. Totala antalet möjliga meddelanden blir alltså

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}(k+2)! = 1548801969976.$$

Antalet meddelanden som använder sju vimplar är $9!\binom{13}{7}/2 = 1801800$.

Exempel 3 Fröken H är nyinflyttad i stan och har fått tag i en lägenhet med tre fönsterbänkar. Hon har råd att köpa tolv olika krukväxter. På hur många sätt kan de placeras ut på fönsterbänkarna?

Vi tänker oss först *en* fönsterbänk, som vi sedan brutalt kapar med två snitt. De två snitten tillsammans med de tolv blommorna ger fjorton platser. Vi väljer först två platser för snitten ($\binom{14}{2}$ möjligheter) och därefter placerar vi ut de tolv blommorna på de återstående platserna (12! möjligheter). Multiplikationsprincipen ger svaret $\binom{14}{2}12! = 43.589.145.600$ möjligheter.

En användbar teknik är ibland att beräkna storleken på komplementet till de händelser man är intresserad av.

Exempel 4 En förening består av sju herrar och nio damer. På hur många sätt kan man tillsätta en styrelse bestående av fyra medlemmar om minst två måste vara damer?

Antalet sätt att tillsätta en styrelse utan villkor är $\binom{7+9}{4}$. Antalet av dessa där ingen dam ingår är $\binom{7}{4}$ och antalet med en dam är $\binom{7}{3} \cdot 9$. Svaret blir därför $\binom{16}{4} - (\binom{7}{4} + \binom{7}{3} \cdot 9) = 1470$.

Vi kan också resonera så att antalet styrelser med 2 damer är $\binom{9}{2}\binom{7}{2}$. Antalet styrelser med 3 damer är $\binom{9}{3}7$ och antalet med 4 damer är $\binom{9}{4}$. Svaret blir därför $\binom{9}{2}\binom{7}{2} + \binom{9}{3}7 + \binom{9}{4}$.

Exempel 5 Hur många femsiffriga tal innehåller minst en sjua?

Vi beräknar först antalet femsiffriga tal och subtraherar antalet tal som inte innehåller någon sjua. Antalet femsiffriga tal är $9 \cdot 10^4 = 90.000$. Antalet som inte innehåller någon sjua är $8 \cdot 9^4$, så svaret blir $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37.512$.

7. Övningar

Övning 2 Hur många “ord” med tre bokstäver kan man bilda av bokstäverna *a*,*b*,*c*,*d*,*e* och *f* om

a) upprepningar av bokstäverna inte är tillåtna?
b) upprepningar av bokstäverna är tillåtna?
c) om ordet ska innehålla *e* och upprepningar inte är tillåtna?
d) om ordet ska innehålla *e* och upprepningar är tillåtna?

Övning 3 På hur många sätt kan man välja

a) två frukter,
b) nio frukter,
c) ett godtyckligt antal (minst en) frukter,

från fem (lika) äpplen och åtta (lika) apelsiner?

Övning 4 En pokerhand består av fem kort. Vad är sannolikheten att få

a) en stege (dvs korten har på varandra följande valörer, men har inte alla samma färg)
b) en kåk (dvs en triss (tre kort av samma valör) och ett par (två kort av samma valör))

på given i poker?

Övning 5 En kommitté ska bildas i en förening som består av sju kvinnor och fyra män. På hur många sätt kan det göras om

a) kommitten ska bestå av två kvinnor och två män?
b) kommitten kan vara godtyckligt stor men ha lika många kvinnor som män?
c) kommitten ska ha fyra medlemmar varav minst två är kvinnor?
d) kommitten ska ha två kvinnliga och två manliga medlemmar och herr Johansson ska ingå?
e) kommitten ska ha två kvinnliga och två manliga medlemmar och herr och fru Johansson ska inte båda vara med?

Övning 6 Du ska köpa tio flaskor öl i en affär som har tre olika sorter. På hur många sätt kan du göra det om du skall ha minst två av varje sort?

Övning 7 En dominobrickas framsida är delad i två kvadrater som var och en består av ingen, en, ... eller sex prickar. Hur många dominobrickor finns det?

Övning 8 Hur många termer får man då man utvecklar $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$?

Övning 9 Hur många icke-negativa heltalslösningar finns det till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$?
Hur många med $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \geq 0$? Hur många med $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 4, x_4 \leq 3$?

Förslag till svar

1. Tokfan
2. a) 120 b) 216 c) 60 d) 91
3. a) 3 b) 5 c) 53
4. a) $10(4^5 - 4)\Big/\binom{52}{5} \approx 0,0035$ b) $13 \cdot 12\binom{4}{2}\binom{4}{3}\Big/\binom{52}{5} \approx 0,0014$
5. a) 126 b) 329 c) 301 d) 63 e) 108
6. 15
7. 28
8. $\binom{n+k-1}{n}$
9. a) 680 b) 84 c) 74