Lösn.. Tentamen i Diskret Matematik, TMV200.

2012-08-22

---

1. Lös den diofantiska ekvationen $8x + 15y = 100$. (6p)

   Lsn. Ta $(x_0, y_0) = (2, -1)$ som löser ekvationen $8x + 15y = 0$. Eftersom $sgd(8, 15) = 1$ är den allmänna lösningen till $8x + 15y = 100$

$$x = 200 + 15n, \quad y = -100 - 8n.$$

2. Vi definierar en talföljd $L(1), L(2), \cdots$ enligt följande rekursiv formel:

$$L(0) = 2, \quad L(1) = 4, \quad L(n) = 3L(n-1) - 2,\ n \geq 2.$$

   Bevisa med induktion att $L(n) = 3^n + 1$ för alla naturliga tal n. (6p)

   Bevis. $L(0) = 2$, och $3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$, så gäller påståendet för $n = 0$. Antag det gäller för $n = k$, dvs $L(k) = 3^k + 1$, skall vi bevisa det för $n = k + 1$. Engligt den rekursiva formeln och induktionsantagandet

$$L(k+1) = 3L(k) - 2 = 3(3^k + 1) - 2 = 3^{k+1} + 3 - 2 = 3^{k+1} + 1$$

   dvs påst. är bevisat för $k + 1$. Därmed gäller det för alla n.

3. Hur många av heltalen $1, 2, \cdots, 300$ är relativt prima med 300? Hur många är relativt prima med 10? (6p)

   Lsn. Beräkna Eulertal $\Phi(300)$ för 300. Primtalfaktorisering: $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$. $\Phi(300) = \Phi(3)\Phi(2^2)\Phi(5^2) = 2 \cdot 2 \cdot 20 = 80$. Svar: Det är 80 st av talen är relativt prima med 300.

   Vi beräknar antalet N av heltalen x, $1 \leq x \leq 300$ som ej är relativt prima med 10, dvs dessa x med $sgd(x, 10) > 1$. Eftersom $10 = 2 \cdot 5$, ett sådant x har en faktor 2 eller 5. Antalet av x som har en faktor 2 är 150 (dvs dessa jämna tal mellan 1 och 300); antalet med faktor 5 är 60. Snittet av dessa två mängder är heltalen som har faktor 10, vars antal är 30. N blir nu

$$N = 150 + 60 - 30 = 180.$$

   Svar: $300 - N = 120$.

4. Här kommer 3 påståenden. Ange S (Sant) eller F (Falskt). Ge ett resonemang för de sanna påståendena och ett motexempel för de falska påståendena. Endast svar med rätta argument ger något poäng. Universum är mängden $\mathbb{Z}^+$ av positiva heltal. (7p)

   [a] $\forall x, \forall y, \forall z : x | yz \Rightarrow x | y \quad$ eller $\quad x | z$.

   [b] $\forall x, \forall y, \forall z : sgd(x, y) = 1 \quad$ och $\quad sgd(x, z) = 1 \Rightarrow sgd(x, yz) = 1$

   [c] Låt p och q vara två heltal, $p \neq q$. Det finna x sådant att

$$x \equiv 0 \bmod p \quad \text{och} \quad x \equiv 1 \bmod q.$$

Lsn. **[a]** F. $x = 6, y = 3, z = 2$.

[b] S. Allmänt: Om p är ett primtal som delar x och yz, så delar p en av y och z, dvs, p delar $sgd(x, y)$ eller $sgd(x, z)$. Nu eftersom $sgd(x, y) = 1$, $sgd(x, z) = 1$, så finns inget primtal som delar x och yz. Dvs, $sgd(x, yz) = 1$.

[c] F. (Påminnelser: Kinesiska restsatsen.) Låt $p = 2$, $q = 4$. Så har ekvationssystemet ingen lösn., eftersom om $x \equiv 1 \bmod 4$ så är $x \equiv 1 \bmod 2$, som motsäger $x \equiv 0 \bmod 2$.

5. Hur många olika 6-siffriga tal kan man bilda av sifforna i talet 123345? (6p)

   Lsn: $\frac{6!}{2!} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

6. Låt A vara en mängd med m element och $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ med n element. Hur många funktioner $f : A \to B$ som har b_1 i sin bild (dvs, det finns $a \in A$, $f(a) = b_1$) finns det? (6p)

   Lsn. Allmänt: Antalet funktioner från A med m element till B med n element är

   $$\underbrace{n \cdots n}_{m\,\text{st.}} = n^m$$

   eftersom varje element i A har n st. val och det är m st element i A. Antalet funktioner från A till B som inte träffar b_1 är exakt antalet funktioner från A till $B \setminus \{b_1\}$, vars antal är $(n-1)^m$. Svar: $n^m - (n-1)^m$.

7. Kan du rita de fullständiga grafen K_4 med 4 noder utan att lyfta pennan och utan att gå på samma kant flera gånger? Kan du göra det för K_5 med 5 noder? Förklara varför du kan eller inte kan. (6p)

   Svar: Grafen K_4 har gradtal 3 på alla sina noder, medan K_5 har gradtal 4. Enligt Eulersatsen kan vi rita K_5 men inte K_4.

8. Låt p, q vara två heltal. Vi definierar en avbidning: $f : \mathbb{Z}_{pq} \to \mathbb{Z}_p \times Z_q$ från $\mathbb{Z}_{pq}$ till produktmängden $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, genom $f([x]_{pq}) = ([x]_p, [x]_q)$. Bevisa att f är väldefinierad (dvs oberoende på representatater). Antag p och q är relativt prima. Bevisa att f är en bijektion. (1+6p)

   Bevis. Påminnelser: $\mathbb{Z}_n$ är heltalen mod n dvs ekvivalensklasser av heltal mod n. Om $[x]_{pq} = [y]_{pq}$, dvs $x - y = 0 \bmod pq$, som enligt definitionen betyder att pq delar talet $x - y$, med p delar pq, så delar p också $x - y$, dvs $[x]_p = [y]_p$; likadånt får vi $[x]_q = [y]_q$. Att f är väldefinerad är bevisat.

   Antag $sdg(p, q) = 1$. För varje $([r]_p, [s]_q) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, enlight Kinesiska restsaten så finns ett heltal x så att

   $$x \equiv r \bmod p \quad \text{och} \quad x \equiv s \bmod q.$$

   dvs $[x]_p = [r]_p$, $[x]_q = [s]_q$. Med andra ord: $f([x]_{pq}) = ([r]_p, [s]_q)$ och f är på (surjektiv). Men mängderna $\mathbb{Z}_{pq}$ och $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ har samman antal element, pq stycken, måste f vara injektiv. (Man kan bevisa injektiviteten sjävständigt också.)