Tentamen i Diskret Matematik, TMV200.

2011 12 15. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Telefon: Magnus Önnheim, 0703-088304

Motivera väl dina lösningar och svar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida. Tentorna kommer att delas ut vid ett tillfälle som meddelas på hemsidan. Därefter kan de hämtas på expeditionen, MV.

---

1. Lös den diofantiska ekvationen $4x + 10y = 16$. (6p)

2. Bestäm resten av $11^{49} - 7^{24}$ vid division med 35. (6p)

3. Bevisa med induktion (med fullständigt bevis) att (6p)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

4. Här kommer 3 påståenden. Ange S (Sant) eller F (Falskt). Ge ett resonemang för de sanna påståendena och ett motexempel för de falska påståendena. Endast svar med rätta argument ger något poäng. Universum är mängden $\mathbb{Z}^+$ av positiva heltal. (7p)

   [a] $\forall x, \forall y, \forall z : x^2 | yz \Rightarrow x|y \quad \text{och} \quad x|z$.

   [b] $\forall x, \forall y, \forall z : sgd(x, yz) = 1 \Rightarrow sgd(x, y) = 1 \quad \text{och} \quad sgd(x, z) = 1$.

   [c] Låt p och q vara två primtal, $p \neq q$, och x vara ett heltal. Antag sgd$(x, pq) = 1$. Då gäller $x^{pq-p-q+2} \equiv x$ mod pq.

5. **[a]** En klass av 10 elever skall uppdelas i tre små grupper A, B och C med $5, 3$ respektive 2 elever. På hur många sätt kan detta ske? (4p)

   [b] Formulera en allmän formel för antalet sätt att uppdela en klass av $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ elever i k grupper med $n_1, n_2, \cdots, n_k$ elever. Inget argument krävs. (2p)

6. Låt A vara en mängd med två element och B en mängd med n element (där $n \geq 2$ är ett fixt heltal). (Tänk $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, \cdots, n\}$.) Hur många injektiva funktioner från A till B finns det? Hur många surjektiva funktioner från B till A finns det? Hur många ekvivalensrelationer på B med exakt två ekvivalensklasser finns det? (6p)

7. Låt $K_{3,5}$ vara den fullständiga bipartita grafen på 3 noder $\{a_1, a_2, a_3\}$ respektive 5 noder $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Hur många olika enkla vägar finns det från noden a_1 till noden a_3? (6p)

8. Låt $n \geq 2$ vara ett heltal och $\mathbb{Z}_n$ vara mängden av alla heltal modulo n. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_n$ enligt följande: $a\mathcal{R}b$ om det finns ett $x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq [0]$, som löser ekvationen $ax = b$ (som ekvation i $\mathbb{Z}_n$). Bevisa att $\mathcal{R}$ är ekvivalensrelation om och endast om n är ett primtal. (7p)

Lycka till! GZ