

2012-04-13

1. $6(-1) + 7(1) = 1$, $(x_0, y_0) = (-10, 10)$ är en lösning. Eftersom $\text{sgd}(6, 7) = 1$, är den allmänna lösning

$$\begin{cases} x = -10 + 7n \\ y = 10 - 6n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Basfallet $\boxed{n=2}$: V.L. $= 1^3 + 2^3 = 9$, H.L. $= 2^4 = 16$.

$$\text{V.L.} < \text{H.L.}$$

Antag gäller för $\boxed{n=m}$. Vill visa för $\boxed{n=m+1}$

Induktionsantagandet är:

$$(\star) \quad \sum_{k=1}^m k^3 < m^4.$$

$$\boxed{n=m+1} \quad \text{V.L.} = \sum_{k=1}^m k^3 + (m+1)^3 \stackrel{(\star)}{<} m^4 + (m+1)^3.$$

$$m^4 + (m+1)^3 = m^4 + m^3 + 3m^2 + 3m + 1.$$

$$\text{H.L.} = (m+1)^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1.$$

$$\Rightarrow \text{V.L.} < \text{H.L.}, \text{ ty } 1 < 4, \quad 3 < 6, \quad 3 < 4.$$

3. $200 = 5^2 \cdot 2^3$. $\Phi(200) = \Phi(5^2) \Phi(2^3) = (5^2 - 5)(2^3 - 2^2) = 80$.

Beräkna $3^{164} \bmod 200$. $\text{sgd}(3, 200) = 1 \Rightarrow$

$$3^{\Phi(200)} \equiv 1, \text{ dvs } 3^{80} \equiv 1 \Rightarrow 3^{160} \equiv 1 \Rightarrow \underline{3^{164} \equiv 3^4 = 81}.$$

4. (a) R_1 reflexiv, ty $a|a$ för varje a

(2)

R_2 ej reflexiv ty om $a=2$, $ax+ay=1$ ej lösbar

(b) R_1 ej symmetrisk. Motex. $a=2$, $b=4$, $a|b$, $b \nmid a$.

R_2 symm. ty om $ax+by=1$ lösbar så är

$bu+av=1$ också lösbar med $u=y$, $v=x$

(c) R_1 transitiv: $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$

R_2 ej transitiv. Motex. $a=2$, $b=3$, $c=4$.

aR_2b , bR_2c , men $a \nmid c$

5. LSN1. Betrakta alla "ord" med bokstäverna

$SA_1N_1N_2IN_3GA_2R$. Det finns $9!$ st. Därefter

tar bort vi index 1, 2, 3 på $N_1N_2N_3$ och index 1, 2

på A_1A_2 . Varje ord utan indexen motsvarar $3! \cdot 2!$ "ord"

med indexen. Svar $\frac{9!}{3!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

$= 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

LSN2 Välj först 3 platser ur 9 olika platser för N -en.

Antalet val är $\binom{9}{3}$. Sedan välj 2 platser för A -en

ur 6 kvarstående platser, antalet är $\binom{6}{2}$. Nu är bokstäverna

SIGR olika, och de skall placeras på de 4 platserna.

(3)

Antalet placeringar är $4!$.

$$\text{Svar } \binom{9}{3} \binom{6}{2} 4! = \frac{9!}{3! 6!} \cdot \frac{6!}{2! 4!} \cdot 4! \\ = \frac{9!}{3! 2!} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7.$$

6. Väja delmängd B , $C \subseteq B \subseteq A$ bestäms

entydigt av $D = B \setminus C \subseteq A \setminus C$, och omvänt, väja D ;

$D \subseteq A \setminus C$ ger upphov till en delmängd $B = C \cup D$

mellan C och A . Antalet element i $A \setminus C$ är

$a - c$ och antalet delmängder D av $A \setminus C$ är 2^{a-c}

Svar 2^{a-c} .

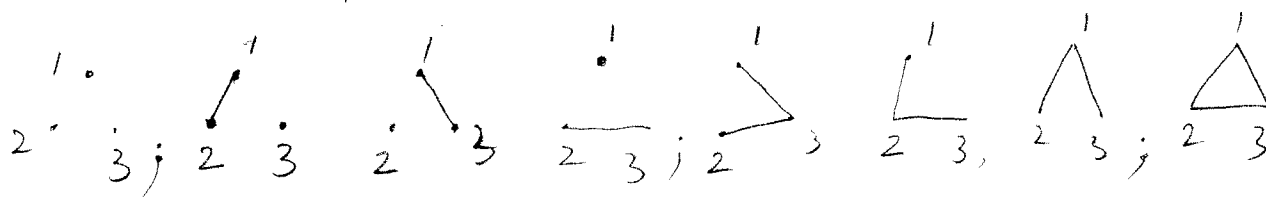
Vi betraktar delmängder B av A som har tomt

snitt med C , $B \cap C = \emptyset$. Dessa är precis alla

delmängder B av $A \setminus C$, som har antal 2^{a-c} .

Svar $2^a - 2^{a-c}$.

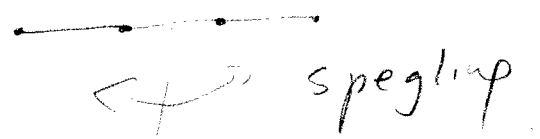
7. [a] Det finns $2^3 = 8$ st grafer med noder 1, 2, 3.



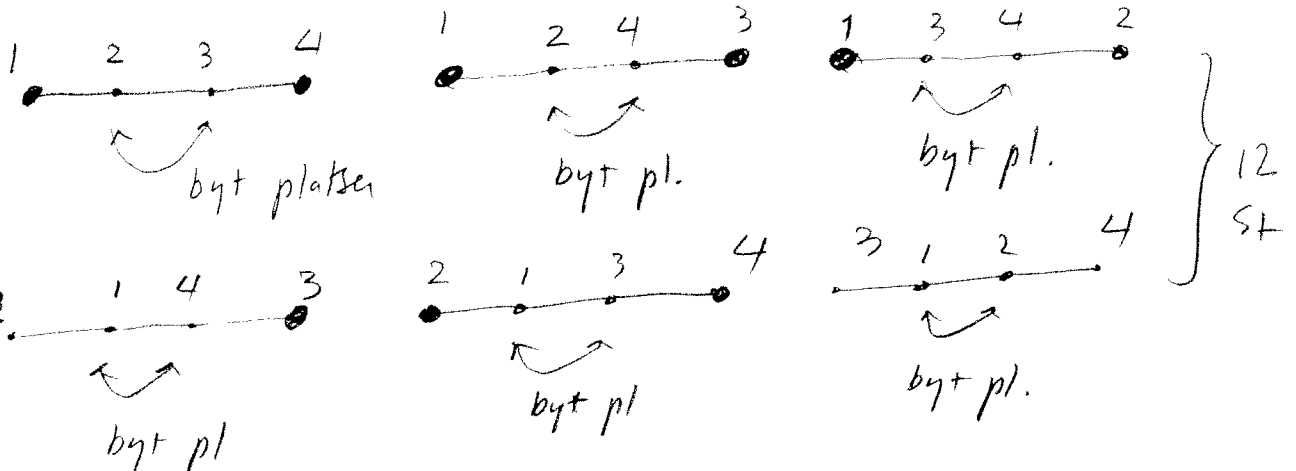
[b] Bortsett från nodernas numering finns bara 2 typer



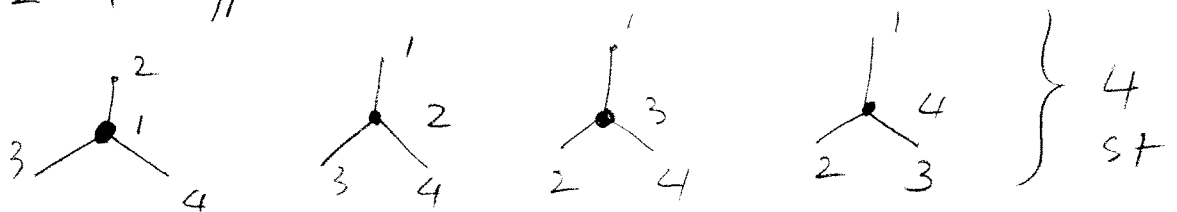
Den 1: a typen har $\frac{4!}{2} = 12$ st träd med noders⁽⁴⁾ numering, eftersom det är en speglingssymmetri



De är



Den 2: a typen är



8. Bevis Beräkna kongruenser mod 7

$$2^{4n-1} + 3^{2n+1} \equiv 2^{n-1} \cdot 2^{3n} + (3^2)^n \cdot 3$$

$$\equiv 2^{n-1} \cdot (2^3)^n + (9)^n \cdot 3 \equiv 2^{n-1} \cdot 1^n + 2^n \cdot 3$$

$$\equiv 2^{n-1} (1 + 2 \cdot 3) \equiv 2^{n-1} \cdot 7 \equiv 0, \text{ dvs}$$

$$7 \mid 2^{4n-1} + 3^{2n+1}$$